Marche aléatoire persistante : limite d'échelle

Basile de Loynes

10 mai 2017

Dans cet exposé, on présentera un modèle de marche aléatoire à longue mémoire en dimension 1. Étant donnée une suite de variables aléatoires $\{X_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, on s'intéresse au comportement en temps long du processus $\{S_n\}_{n\geq 0}$ défini par

$$S_0 := 0 \quad \text{et} \quad S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k \quad n \geq 1.$$

Lorsque les accroissements X_k sont supposés i.i.d., il s'agit de la marche aléatoire classique dont le comportement est bien connu. Dans le modèle étudié, les lois de sauts dépendent partiellement du passé de la trajectoire. Plus précisément, on se donne une famille $\{p_{b,z}\}_{(b,z)\in\{0,1\}\times\mathbb{N}^*}$ de réels dans $[0, 1]$ et on définit le temps de persistance $L_n = \mathsf{card}\ \{\ell \geq 0 : X_n = X_{n-1} = \cdots = X_{n-\ell} \neq X_{n-\ell-1}\}$. Alors

$$\mathcal{L}(X_n|X_k, k \leq n) = \mathcal{B}(p_{X_n,L_n}) := p_{X_n,L_n}\delta_{-1} + (1 - p_{X_n,L_n})\delta_1.$$

Autrement dit, la probabilité de monter ou de descendre dépend du temps passé dans la direction dans laquelle le marcheur est train d'évoluer. Cette persistance est modélisée à l'aide d'une chaîne de Markov à longueur variable (VLMC pour Variable Length Markov Chain).

Après avoir décrit le modèle (notamment donner la preuve de son existence), on s'intéressera aux asymptotiques fonctionnelles de la marche persistante $\{S_n\}_{n\geq 0}$. Plus pécisément, on établira la convergence fonctionnelle des processus

$$\left\{\frac{S_{\lfloor ut\rfloor} - \mathsf{m}_S ut}{\lambda(u)}\right\}_{t\geq 0} \quad \text{et} \quad \left\{\frac{S_{ut} - \mathsf{m}_S ut}{\lambda(u)}\right\}_{t\geq 0},$$

où $\{S_t\}_{t\geq 0}$ est l'interpolation linéaire de la marche $\{S_n\}_{n\geq 0}$, vers un processus $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ pour des quantités m_S et λ explicites. Selon les propriétés de régularités de L_n, le processus limite peut être un mouvement Brownien, un processus de Lévy ou encore une diffusion anomale.

Ces travaux sont issus d'une collaboration avec P. Cénac, A. Le Ny et Y. Offret soumis à *Journal of Theoretical Probability* (lien hal : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01404663).