Comportement en temps long de dynamiques discrètes à mémoire

Maylis Varvenne

21 Juin 2017

INSTITUT de MATHEMATIQUES de TOULOUSE

Directeurs de thèse : Laure Coutin & Fabien Panloup

Cadre de travail

Soit $X := (X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que

$$X_{n+1} = F(X_n, \Delta_{n+1}) \tag{1.1}$$

où le bruit $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite stationnaire gaussienne ergodique et $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est continue.

Cadre de travail

Soit $X := (X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que

$$X_{n+1} = F(X_n, \Delta_{n+1}) \tag{1.1}$$

où le bruit $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite stationnaire gaussienne ergodique et $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est continue.

Exemple de bruit

Accroissements du mouvement Brownien fractionnaire (mBf) de paramètre de Hurst $H \in (0,1)$ noté $(B_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$.

Le mBf est un processus gaussien centré à accroissements stationnaires tel que pour tout t, s

$$\mathbb{E}[(B_t^H - B_s^h)^2] = |t-s|^{2H}.$$

Représentation en moyenne mobile

Théorème de décomposition de Wold,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \Delta_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi_{n-k} \tag{1.2}$$

avec

$$\begin{cases} (a_k)_{k \geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{telle que} \quad a_0 \neq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 < +\infty \\ (\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}} \quad \text{une suite i.i.d telle que } \xi_1 \sim \mathcal{N}(0, I_d). \end{cases}$$

Représentation en moyenne mobile

Théorème de décomposition de Wold,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \Delta_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi_{n-k} \tag{1.2}$$

avec

$$\begin{cases} (a_k)_{k\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ \text{ telle que } \ a_0 \neq 0 \ \text{ et } \ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 < +\infty \\ (\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}} \ \text{ une suite i.i.d telle que } \xi_1 \sim \mathcal{N}(0, I_d). \end{cases}$$

Remarques

- Quitte à considérer $\tilde{\Delta}_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{a}_k \xi_{n-k}$ avec $\tilde{a}_k = a_k / a_0$, on peut prendre $a_0 = 1$.

Représentation en moyenne mobile

Théorème de décomposition de Wold,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \Delta_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi_{n-k} \tag{1.2}$$

avec

$$\begin{cases} (a_k)_{k\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que } a_0 \neq 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 < +\infty \\ (\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}} \text{ une suite i.i.d telle que } \xi_1 \sim \mathcal{N}(0, I_d). \end{cases}$$

Remarques

- ▷ Quitte à considérer $\tilde{\Delta}_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{a}_k \xi_{n-k}$ avec $\tilde{a}_k = a_k / a_0$, on peut prendre $a_0 = 1$.
- ▷ La mémoire induite par le bruit est quantifiée par la suite $(a_k)_{k\geqslant 0}$.

<u>Outil :</u> opérateur de type Toeplitz

Définition

Soit $\mathbf{T_a}$ défini sur $\ell_a(\mathbb{Z}^-, \mathbb{R}^d) := \left\{ w \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^-} \;\middle|\; \forall k \geqslant 0,\ \sum_{l=0}^{+\infty} a_l w_{-k-l} < +\infty \right\}$ par

$$\forall w \in \ell_a(\mathbb{Z}^-, \mathbb{R}^d), \quad \mathbf{T_a}(w) = \left(\sum_{l=0}^{+\infty} a_l w_{-k-l} \right)_{k \geqslant 0}. \tag{1.3}$$

Outil : opérateur de type Toeplitz

Définition

Soit $\mathbf{T_a}$ défini sur $\ell_a(\mathbb{Z}^-, \mathbb{R}^d) := \left\{ w \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^-} \;\middle|\; \forall k \geqslant 0,\ \sum_{l=0}^{+\infty} a_l w_{-k-l} < +\infty \right\}$ par

$$\forall w \in \ell_a(\mathbb{Z}^-, \mathbb{R}^d), \quad \mathbf{T_a}(w) = \left(\sum_{l=0}^{+\infty} a_l w_{-k-l} \right)_{k \geqslant 0}. \tag{1.3}$$

Remarque : Cet opérateur relie $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ au bruit sous-jacent $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Proposition

Soit $\mathbf{T_b}$ défini sur $\ell_b(\mathbb{Z}^-, \mathbb{R}^d)$ avec la suite $(b_k)_{k\geqslant 0}$ suivante

$$b_0 = \frac{1}{a_0} \quad \text{and} \quad \forall k \geqslant 1, \quad b_k = -\frac{1}{a_0} \sum_{l=1}^{k} a_l b_{k-l}. \tag{1.4}$$

Alors, $\mathbf{T_b} = \mathbf{T_a}^{-1}$.

On pose $\mathcal{X} := \mathbb{R}^d$ l'espace d'état et $\mathcal{W} := (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^-}$ l'espace du bruit.
<u>Idée</u> :

$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}} \dashrightarrow (X_n, (\Delta_{n+k})_{k\leqslant 0})_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{X} \times \mathcal{W})^{\mathbb{N}}$$

On pose $\mathcal{X} := \mathbb{R}^d$ l'espace d'état et $\mathcal{W} := (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^-}$ l'espace du bruit.

Idée :

$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}} \dashrightarrow (X_n, (\Delta_{n+k})_{k\leqslant 0})_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{X} \times \mathcal{W})^{\mathbb{N}}$$

Système équivalent :

$$(X_{n+1}, (\Delta_{n+1+k})_{k\leqslant 0}) = \varphi\left((X_n, (\Delta_{n+k})_{k\leqslant 0}), \Delta_{n+1}\right) \tag{1.5}$$

où

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathcal{X} \times \mathcal{W}) \times \mathbb{R}^d &\to \mathcal{X} \times \mathcal{W} \\ ((x, w), \delta) &\mapsto (F(x, \delta), w \sqcup \delta). \end{aligned}$$

Noyau de Transition : Pour toute fonction mesurable $g : \mathcal{X} \times \mathcal{W} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{Q} : \mathcal{X} \times \mathcal{W} \to \mathcal{M}_1(\mathcal{X} \times \mathcal{W})$ est défini par :

$$\int_{\mathcal{W}} g(x', w')\mathcal{Q}((x, w), (\mathrm{d}x', \mathrm{d}w')) = \int_{\mathbb{R}^d} g(F(x, \delta), w \sqcup \delta)\mathcal{P}(w, \mathrm{d}\delta).$$

où $\mathcal{P}(w, \mathrm{d}\delta) := \mathcal{L}(\Delta_{n+1} | (\Delta_{n+k})_{k\leqslant 0} = w)$.

Noyau de Transition : Pour toute fonction mesurable $g : \mathcal{X} \times \mathcal{W} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{Q} : \mathcal{X} \times \mathcal{W} \to \mathcal{M}_1(\mathcal{X} \times \mathcal{W})$ est défini par :

$$\int_{\mathcal{W}} g(x', w') \mathcal{Q}((x, w), (\mathrm{d}x', \mathrm{d}w')) = \int_{\mathbb{R}^d} g(F(x, \delta), w \sqcup \delta) \mathcal{P}(w, \mathrm{d}\delta).$$

où $\mathcal{P}(w, \mathrm{d}\delta) := \mathcal{L}(\Delta_{n+1} | (\Delta_{n+k})_{k \leqslant 0} = w)$.

Définition

On appelle **mesure invariante** associée à (1.1) toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X} \times \mathcal{W})$ invariante pour $\mathcal{Q}$, c'est à dire telle que

$$\mathcal{Q}\mu = \mu.$$

Noyau de Transition : Pour toute fonction mesurable $g : \mathcal{X} \times \mathcal{W} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{Q} : \mathcal{X} \times \mathcal{W} \to \mathcal{M}_1(\mathcal{X} \times \mathcal{W})$ est défini par :

$$\int_{\mathcal{W}} g(x', w')\mathcal{Q}((x, w), (\mathrm{d}x', \mathrm{d}w')) = \int_{\mathbb{R}^d} g(F(x, \delta), w \sqcup \delta)\mathcal{P}(w, \mathrm{d}\delta).$$

où $\mathcal{P}(w, \mathrm{d}\delta) := \mathcal{L}(\Delta_{n+1} | (\Delta_{n+k})_{k \leqslant 0} = w)$.

Définition

On appelle **mesure invariante** associée à (1.1) toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathcal{X} \times \mathcal{W})$ invariante pour $\mathcal{Q}$, c'est à dire telle que

$$\mathcal{Q}\mu = \mu.$$

Notion d'unicité : Soit $\mathcal{S} : \mathcal{M}_1(\mathcal{X} \times \mathcal{W}) \to \mathcal{M}_1(\mathcal{X}^{\mathbb{N}})$ l'application qui à une mesure μ associe $S\mu := \mathcal{L}((X_n^\mu)_{n \geqslant 0})$. Alors

$$\mu \simeq \nu \Longleftrightarrow \mathcal{S}\mu = \mathcal{S}\nu \quad (\star)$$

$(\mathbf{H_{poly}})$: Les conditions suivantes sont vérifiées,

- il existe $\rho, \beta > 0$ et $C_\rho, C_\beta > 0$ tels que

$$\forall k \geqslant 0, \quad |a_k| \leqslant C_\rho (k+1)^{-\rho} \qquad \text{et} \qquad \forall k \geqslant 0, \quad |b_k| \leqslant C_\beta (k+1)^{-\beta}.$$

- il existe $\kappa \geqslant \rho + 1$ et $C_\kappa > 0$ tels que

$$\forall k \geqslant 0, \quad |a_k - a_{k+1}| \leqslant C_\kappa (k+1)^{-\kappa}.$$

$(\mathbf{H_{poly}})$: Les conditions suivantes sont vérifiées,

- il existe $\rho, \beta > 0$ et $C_\rho, C_\beta > 0$ tels que

$$\forall k \geqslant 0, \quad |a_k| \leqslant C_\rho (k+1)^{-\rho} \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 0, \quad |b_k| \leqslant C_\beta (k+1)^{-\beta}.$$

- il existe $\kappa \geqslant \rho + 1$ et $C_\kappa > 0$ tels que

$$\forall k \geqslant 0, \quad |a_k - a_{k+1}| \leqslant C_\kappa (k+1)^{-\kappa}.$$

Remarques

▷ L'hypothèse sur la dérivée discrète de $(a_k)_{k \geqslant 0}$ est due à la preuve par couplage.

$(\mathbf{H_{poly}})$: Les conditions suivantes sont vérifiées,

- il existe $\rho, \beta > 0$ et $C_\rho, C_\beta > 0$ tels que

$$\forall k \geqslant 0, \quad |a_k| \leqslant C_\rho (k+1)^{-\rho} \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 0, \quad |b_k| \leqslant C_\beta (k+1)^{-\beta}.$$

- il existe $\kappa \geqslant \rho + 1$ et $C_\kappa > 0$ tels que

$$\forall k \geqslant 0, \quad |a_k - a_{k+1}| \leqslant C_\kappa (k+1)^{-\kappa}.$$

Remarques

- ▷ L'hypothèse sur la dérivée discrète de $(a_k)_{k\geqslant 0}$ est due à la preuve par couplage.
- ▷ Même si $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ sont reliées par (1.4), il n'y a pas de règle générale qui connecte ρ et β.

$(\mathbf{H_1})$: Il existe $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+^*$ continue telle que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty$ et $\exists \gamma \in (0,1)$ et $C > 0$ tel que

$$\forall (x,w) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad V(F(x,w)) \leqslant \gamma V(x) + C(1 + |w|).$$

$(\mathbf{H_1})$: Il existe $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+^*$ continue telle que $\lim_{|x| \to +\infty} V(x) = +\infty$ et $\exists \gamma \in (0,1)$ et $C > 0$ tel que

$$\forall (x,w) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad V(F(x,w)) \leqslant \gamma V(x) + C(1 + |w|).$$

$(\mathbf{H_2})$: "Hypothèse de contrôle nécessaire pour la première étape du couplage"

Exemple : Schéma d'Euler de pas $h > 0$

$$F_h : \quad \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$
$$(x, w) \mapsto x + hb(x) + \sigma(x)w. \tag{2.1}$$

où $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est continue, $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est continue bornée et $\sigma^{-1} : x \mapsto \sigma(x)^{-1}$ est définie et continue.

(L1) $\exists C > 0$ telle que $\forall x \in \mathcal{X}, \quad |b(x)| \leqslant C(1 + |x|)$

(L2) $\exists \tilde{\beta} \in \mathbb{R}$ et $\tilde{\alpha} > 0$ tels que $\forall x \in \mathcal{X}, \quad \langle x, b(x) \rangle \leqslant \tilde{\beta} - \tilde{\alpha}|x|^2$.

Proposition

Pour $h > 0$ suffisamment petit, F_h vérifie les hypothèses $(\mathbf{H_1})$ et $(\mathbf{H_2})$ avec $V(x) = |x|$.

Théorème

On suppose $(\mathbf{H_1})$ *et* $(\mathbf{H_2})$*. Alors,*

(i) *Il existe une mesure invariante* $\mu_\star$ *associée à* (1.1)*.*

(ii) *On suppose* $(\mathbf{H_{poly}})$ *avec* $\rho, \beta > 1/2$ *et* $\rho + \beta > 3/2$*. Alors,* $\mu_\star$ *est unique. De plus, pour toute condition initiale* μ_0 *telle que* $\int_{\mathcal{X}} V(x)\Pi^*_{\mathcal{X}}\mu_0(dx) < +\infty$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $C_\varepsilon > 0$ *telle que*

$$\|\mathcal{L}((X^{\mu_0}_{n+k})_{k\geqslant 0}) - \mathcal{S}\mu_\star\|_{TV} \leqslant C_\varepsilon \; n^{-(v(\beta,\rho)-\varepsilon)}.$$

où la fonction v *est définie par*

$$v(\beta,\rho) = \sup_{\alpha \in \left(\frac{1}{2} \vee \left(\frac{3}{2}-\beta\right), \rho\right)} \min\{1, 2(\rho-\alpha)\}(\min\{\alpha, \ \beta, \ \alpha+\beta-1\} - 1/2).$$

Soit $H \in (0,1)$. On parlera de **suite de type fractionnaire** lorsque

$$\forall k \geqslant 0, \quad |a_k| \leqslant C_\rho (k+1)^{-\rho} \quad \text{and} \quad |a_k - a_{k+1}| \leqslant C'_\rho (k+1)^{-(\rho+1)} \tag{2.2}$$

avec $\rho = 3/2 - H$.

Soit $H \in (0,1)$. On parlera de **suite de type fractionnaire** lorsque

$$\forall k \geqslant 0, \quad |a_k| \leqslant C_\rho (k+1)^{-\rho} \quad \text{and} \quad |a_k - a_{k+1}| \leqslant C'_\rho (k+1)^{-(\rho+1)} \tag{2.2}$$

avec $\rho = 3/2 - H$.

Exemple 1

Lorsque $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (B^H_{nh} - B^H_{(n-1)h})_{n\in\mathbb{Z}}$ (avec $h > 0$) on a

$$a^H_k \sim C_{h,H}(k+1)^{-(3/2-H)} \text{ et } |a^H_k - a^H_{k+1}| \leqslant C'_{h,H}(k+1)^{-(5/2-H)}.$$

Soit $H \in (0,1)$. On parlera de **suite de type fractionnaire** lorsque

$$\forall k \geqslant 0, \quad |a_k| \leqslant C_\rho (k+1)^{-\rho} \quad \text{and} \quad |a_k - a_{k+1}| \leqslant C'_\rho (k+1)^{-(\rho+1)} \tag{2.2}$$

avec $\rho = 3/2 - H$.

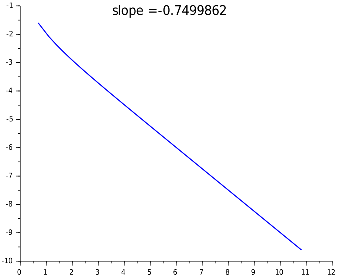
Exemple 1

Lorsque $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (B^H_{nh} - B^H_{(n-1)h})_{n\in\mathbb{Z}}$ (avec $h > 0$) on a

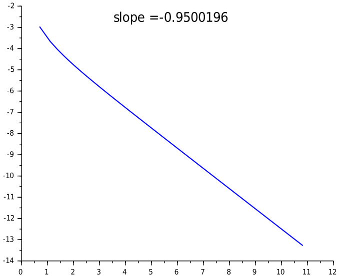
$$a^H_k \sim C_{h,H}(k+1)^{-(3/2-H)} \text{ et } |a^H_k - a^H_{k+1}| \leqslant C'_{h,H}(k+1)^{-(5/2-H)}.$$

Pour $H \in (0, 1/2)$:

$$\forall k \geqslant 0, \quad |b^H_k| \leqslant C''_{h,H}(k+1)^{-(H+1/2)}. \tag{2.3}$$



(a) $H = 0.25$



(b) $H = 0.45$

FIGURE – $(\log |b_k^H|)$ en fonction de $(\log(k+1))$.

Vitesse de convergence à l'équilibre en n^{-v_H} avec

$$v_H = \begin{cases} H(1-2H) & \text{si} \quad H \in (0, 1/4] \\ 1/8 & \text{si} \quad H \in (1/4, 1/2) \end{cases}$$

Exemple 2

$$a_k = (k+1)^{-\rho} \text{ avec } \rho = 3/2 - H.$$

Alors

$$|b_k| \leqslant (k+1)^{-\rho}$$

Donc pour $2\rho > 3/2 \Leftrightarrow H < 3/4$, on obtient une vitesse en $n^{-v'_H}$ avec

$$v'_H = (1-H)^2/2.$$

Conclusion : $v'_H > v_H$ lorsque $H \in (0, 1/2)$

Exemple 2

$$a_k = (k+1)^{-\rho} \text{ avec } \rho = 3/2 - H.$$

Alors

$$|b_k| \leqslant (k+1)^{-\rho}$$

Donc pour $2\rho > 3/2 \Leftrightarrow H < 3/4$, on obtient une vitesse en $n^{-v'_H}$ avec

$$v'_H = (1-H)^2/2.$$

Conclusion : $v'_H > v_H$ lorsque $H \in (0, 1/2)$

$\Rightarrow$ variations de $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ influencent le comportement asymptotique de $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donc la vitesse de convergence !

Références (cadre continu) : Hairer (2005) - Fontbona & Panloup (2014) - Deya, Panloup & Tindel (2016)

Références (cadre continu) : Hairer (2005) - Fontbona & Panloup (2014) - Deya, Panloup & Tindel (2016)

Principe (cadre discret) : On considère (X^1, X^2) solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} X^1_{n+1} = F(X^1_n, \Delta^1_{n+1}) \\ X^2_{n+1} = F(X^2_n, \Delta^2_{n+1}) \end{array} \right. \tag{3.1}$$

avec pour conditions initiales $(X^1_0, (\Delta^1_k)_{k\leqslant 0}) \sim \mu_0$ et $(X^2_0, (\Delta^2_k)_{k\leqslant 0}) \sim \mu_\star$.

Références (cadre continu) : Hairer (2005) - Fontbona & Panloup (2014) - Deya, Panloup & Tindel (2016)

Principe (cadre discret) : On considère (X^1, X^2) solution du système :

$$\begin{cases} X^1_{n+1} = F(X^1_n, \Delta^1_{n+1}) \\ X^2_{n+1} = F(X^2_n, \Delta^2_{n+1}) \end{cases} \tag{3.1}$$

avec pour conditions initiales $(X^1_0, (\Delta^1_k)_{k \leqslant 0}) \sim \mu_0$ et $(X^2_0, (\Delta^2_k)_{k \leqslant 0}) \sim \mu_\star$.

Soit

$$\tau_\infty = \inf\{n \geqslant 0 \mid X^1_k = X^2_k,\ \forall k \geqslant n\}.$$

Il faut majorer $\mathbb{P}(\tau_\infty > n)$ ce qui donnera une borne de la vitesse de convergence vers la mesure invariante car

$$\|\mathcal{L}((X^1_{n+k})_{k \geqslant 0}) - \mathcal{S}\mu_\star\|_{TV} \leqslant \mathbb{P}(\tau_\infty > n).$$

Références (cadre continu) : Hairer (2005) - Fontbona & Panloup (2014) - Deya, Panloup & Tindel (2016)

Principe (cadre discret) : On considère (X^1, X^2) solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} X^1_{n+1} = F(X^1_n, \Delta^1_{n+1}) \\ X^2_{n+1} = F(X^2_n, \Delta^2_{n+1}) \end{array} \right. \tag{3.1}$$

avec pour conditions initiales $(X^1_0, (\Delta^1_k)_{k\leqslant 0}) \sim \mu_0$ et $(X^2_0, (\Delta^2_k)_{k\leqslant 0}) \sim \mu_\star$.

Soit

$$\tau_\infty = \inf\{n \geqslant 0 \mid X^1_k = X^2_k,\ \forall k \geqslant n\}.$$

Il faut majorer $\mathbb{P}(\tau_\infty > n)$ ce qui donnera une borne de la vitesse de convergence vers la mesure invariante car

$$\|\mathcal{L}((X^1_{n+k})_{k\geqslant 0}) - \mathcal{S}\mu_\star\|_{TV} \leqslant \mathbb{P}(\tau_\infty > n).$$

On choisit

$$(\Delta^1_k)_{k\leqslant 0} = (\Delta^2_k)_{k\leqslant 0} \quad \Leftrightarrow \quad (\xi^1_k)_{k\leqslant 0} = (\xi^2_k)_{k\leqslant 0}.$$

Références (cadre continu) : Hairer (2005) - Fontbona & Panloup (2014) - Deya, Panloup & Tindel (2016)

Principe (cadre discret) : On considère (X^1, X^2) solution du système :

$$\begin{cases} X^1_{n+1} = F(X^1_n, \Delta^1_{n+1}) \\ X^2_{n+1} = F(X^2_n, \Delta^2_{n+1}) \end{cases} \tag{3.1}$$

avec pour conditions initiales $(X^1_0, (\Delta^1_k)_{k \leqslant 0}) \sim \mu_0$ et $(X^2_0, (\Delta^2_k)_{k \leqslant 0}) \sim \mu_\star$.

Soit

$$\tau_\infty = \inf\{n \geqslant 0 \mid X^1_k = X^2_k, \ \forall k \geqslant n\}.$$

Il faut majorer $\mathbb{P}(\tau_\infty > n)$ ce qui donnera une borne de la vitesse de convergence vers la mesure invariante car

$$\|\mathcal{L}((X^1_{n+k})_{k \geqslant 0}) - \mathcal{S}\mu_\star\|_{TV} \leqslant \mathbb{P}(\tau_\infty > n).$$

On choisit

$$(\Delta^1_k)_{k \leqslant 0} = (\Delta^2_k)_{k \leqslant 0} \quad \Leftrightarrow \quad (\xi^1_k)_{k \leqslant 0} = (\xi^2_k)_{k \leqslant 0}.$$

On définit la suite de v.a $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \xi^1_{n+1} = \xi^2_{n+1} + g_n$$

Références (cadre continu) : Hairer (2005) - Fontbona & Panloup (2014) - Deya, Panloup & Tindel (2016)

Principe (cadre discret) : On considère (X^1, X^2) solution du système :

$$\begin{cases} X^1_{n+1} = F(X^1_n, \Delta^1_{n+1}) \\ X^2_{n+1} = F(X^2_n, \Delta^2_{n+1}) \end{cases} \tag{3.1}$$

avec pour conditions initiales $(X^1_0, (\Delta^1_k)_{k\leqslant 0}) \sim \mu_0$ et $(X^2_0, (\Delta^2_k)_{k\leqslant 0}) \sim \mu_\star$.

Soit

$$\tau_\infty = \inf\{n \geqslant 0 \mid X^1_k = X^2_k, \ \forall k \geqslant n\}.$$

Il faut majorer $\mathbb{P}(\tau_\infty > n)$ ce qui donnera une borne de la vitesse de convergence vers la mesure invariante car

$$\|\mathcal{L}((X^1_{n+k})_{k\geqslant 0}) - \mathcal{S}\mu_\star\|_{TV} \leqslant \mathbb{P}(\tau_\infty > n).$$

On choisit

$$(\Delta^1_k)_{k\leqslant 0} = (\Delta^2_k)_{k\leqslant 0} \quad \Leftrightarrow \quad (\xi^1_k)_{k\leqslant 0} = (\xi^2_k)_{k\leqslant 0}.$$

On définit la suite de v.a $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \xi^1_{n+1} = \xi^2_{n+1} + g_n \quad \text{donc} \quad g_n = 0 \quad \forall n < 0.$$

Étapes du couplage

- **Étape 1** : Essayer de coller les trajectoires en “contrôlant le coût”.

Étapes du couplage

- **Étape 1** : Essayer de coller les trajectoires en “contrôlant le coût”.

- **Étape 2** : Essayer de maintenir les trajectoires collées (spécifique au cadre non markovien).

Étapes du couplage

- **Étape 1** : Essayer de coller les trajectoires en “contrôlant le coût”.
- **Étape 2** : Essayer de maintenir les trajectoires collées (spécifique au cadre non markovien).
- **Étape 3** : Si l’étape 2 échoue, on attend suffisamment longtemps de manière à ce que l’étape 1 puisse être réalisée avec un coût contrôlé et une probabilité strictement positive. Tout au long de cette étape, on impose $g_n = 0$.

Définition (Admissibilité)

Soit $K > 0$, $\alpha > 0$ et τ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Le système est dit (K, α)-admissible à l'instant τ si $\tau(\omega) < +\infty$ et si $(X^1_\tau(\omega), X^2_\tau(\omega), (\xi^1_n(\omega), \xi^2_n(\omega))_{n \leqslant \tau})$ satisfait

$$\forall n \geqslant 0, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k g_{\tau+n-k}(\omega) \right| \leqslant (n+1)^{-\alpha} \tag{3.2}$$

$$\text{et} \qquad \left|X^i_\tau(\omega)\right| \leqslant K, \quad \left| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \xi^i_{\tau+1-k}(\omega) \right| \leqslant K \quad \text{pour } i = 1, 2 \tag{3.3}$$

Définition (Admissibilité)

Soit $K > 0$, $\alpha > 0$ et τ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Le système est dit (K,α)-admissible à l'instant τ si $\tau(\omega) < +\infty$ et si $(X^1_\tau(\omega), X^2_\tau(\omega), (\xi^1_n(\omega), \xi^2_n(\omega))_{n\leqslant\tau})$ satisfait

$$\forall n \geqslant 0, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k g_{\tau+n-k}(\omega) \right| \leqslant (n+1)^{-\alpha} \tag{3.2}$$

$$\text{et} \qquad \left|X^i_\tau(\omega)\right| \leqslant K, \quad \left| \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \xi^i_{\tau+1-k}(\omega) \right| \leqslant K \quad \text{pour } i = 1,2 \tag{3.3}$$

$$\Omega^1_{\alpha,\tau} = \{\omega \text{ satisfaisant } (3.2)\} \quad \text{et} \quad \Omega^2_{K,\tau} = \{\omega \text{ satisfaisant } (3.3)\}$$

$$\Omega_{K,\alpha,\tau} = \Omega^1_{\alpha,\tau} \cap \Omega^2_{K,\tau}. \tag{3.4}$$

Notations : Soit $j \geqslant 1$. On pose

- τ_j : fin de l'étape 3 de la j-ième tentative.
- Intervalles

$$\mathrm{I}_{j,0} := \{\tau_{j-1} + 1\}, \quad \mathrm{I}_{j,1} := [\![\tau_{j-1} + 2, \tau_{j-1} + 2c_2 - 1]\!]$$

$$\text{et} \qquad \forall \ell \geqslant 2, \quad \mathrm{I}_{j,\ell} := \left[\!\!\left[\tau_{j-1} + c_2 2^{\ell}, \tau_{j-1} + c_2 2^{\ell+1} - 1\right]\!\!\right]$$

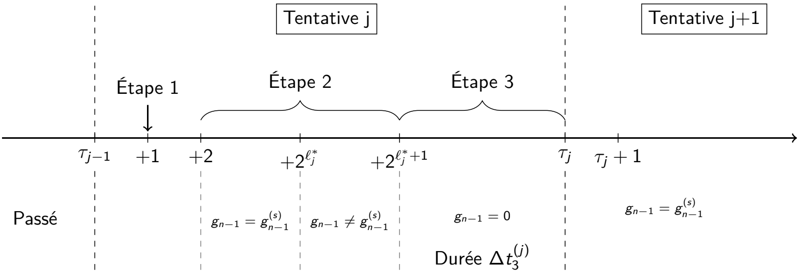
- $\ell_j^* \geqslant 0$ tel que I_{j,ℓ_j^*} = "intervalle échec".
- $\Delta t_3^{(j)}$: durée de l'étape 3 de la tentative j.

Notations : Soit $j \geqslant 1$. On pose

- τ_j : fin de l'étape 3 de la j-ième tentative.
- Intervalles

$$\mathrm{I}_{j,0} := \{\tau_{j-1}+1\}, \quad \mathrm{I}_{j,1} := [\![\tau_{j-1}+2, \tau_{j-1}+2c_2-1]\!]$$
$$\text{et} \qquad \forall \ell \geqslant 2, \quad \mathrm{I}_{j,\ell} := \left[\!\!\left[\tau_{j-1}+c_2 2^{\ell}, \tau_{j-1}+c_2 2^{\ell+1}-1\right]\!\!\right]$$

- $\ell_j^* \geqslant 0$ tel que $\mathrm{I}_{j,\ell_j^*} =$ "intervalle échec".
- $\Delta t_3^{(j)}$: durée de l'étape 3 de la tentative j.



Borne inférieure sur la probabilité de réussite du couplage

$$\boxed{\mathbb{P}(\tau_j = +\infty | \tau_{j-1} < +\infty) \geqslant \delta > 0}$$

Borne inférieure sur la probabilité de réussite du couplage

$$\boxed{\mathbb{P}(\tau_j = +\infty | \tau_{j-1} < +\infty) \geqslant \delta > 0}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\Delta\tau_j = +\infty | \Omega_{K,\alpha,\tau_{j-1}}) \geqslant \delta_0 > 0} \qquad \boxed{\mathbb{P}(\Omega_{K_\varepsilon,\alpha,\tau_{j-1}} | \tau_{j-1} < +\infty) \geqslant 1 - \varepsilon}$$

Étape 2

Maintien des trajectoires collées : $X^1_{k+1} = X^2_{k+1}$ $\forall k \geqslant n+1$, i.e.

$$\forall k \geqslant n+1, \quad F\left(X^1_k,\ \xi^1_{k+1} + \sum_{l=1}^{+\infty} a_k \xi^1_{k+1-l}\right) = F\left(X^1_k,\ \xi^2_{k+1} + \sum_{l=1}^{+\infty} a_k \xi^2_{k+1-l}\right)$$

$$\text{plutôt} \quad \forall k \geqslant n+1, \quad g_k = -\sum_{l=1}^{+\infty} a_l g_{k-l}$$

Étape 2

Maintien des trajectoires collées : $X_{k+1}^1 = X_{k+1}^2$ $\forall k \geqslant n+1$, i.e.

$$\forall k \geqslant n+1, \quad F\left(X_k^1,\ \xi_{k+1}^1 + \sum_{l=1}^{+\infty} a_k \xi_{k+1-l}^1\right) = F\left(X_k^1,\ \xi_{k+1}^2 + \sum_{l=1}^{+\infty} a_k \xi_{k+1-l}^2\right)$$

$$\text{plutôt} \quad \forall k \geqslant n+1, \quad g_k = -\sum_{l=1}^{+\infty} a_l g_{k-l}$$

Lemme 2 (inspiré de version continue M.Hairer)

Soit $T > 0$, $b > 0$, $g^{(s)} = (g_0^{(s)}, g_1^{(s)}, \ldots, g_T^{(s)}) \in \mathbb{R}^{T+1}$ tel que $\|g^{(s)}\| \leqslant b$.

(i) Alors, il existe $\delta_b^1 \in (0,1)$ et $((\xi_{k+1}^1)_{k \in [\![0,T]\!]}, (\xi_{k+1}^2)_{k \in [\![0,T]\!]})$ de loi $\mathcal{N}(0, I_{T+1})$ tels que pour $M_b := \max(4b, -2\log(b/8))$

$$\mathbb{P}\left(\xi_{k+1}^1 = \xi_{k+1}^2 + g_k^{(s)} \ \ \forall k \in [\![0, T]\!]\right) \geqslant \delta_b^1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\|\xi^1 - \xi^2\| \leqslant M_b\right) = 1.$$

(ii) Si $b \in (0,1)$, l'assertion précédente est vraie pour $\delta_b^1 = 1 - b$.

Étape 2

$$\mathcal{B}_{j,\ell} := \Omega_{K,\alpha,\tau_{j-1}} \cap \{\ell_j^* > \ell\}$$

alors

$$\mathbb{P}(\Delta\tau_j = +\infty | \Omega_{K,\alpha,\tau_{j-1}}) = \mathbb{P}(\text{succès de l'étape 1 } | \Omega_{K,\alpha,\tau_{j-1}}) \prod_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathcal{B}_{j,\ell} | \mathcal{B}_{j,\ell-1})$$

On applique le lemme 2 sur les intervalle $\mathsf{I}_{j,\ell}$ en utilisant le fait que si $\alpha > \frac{1}{2} \vee \left(\frac{3}{2} - \beta\right)$

$$\|g^{(s)}\|_{\mathsf{I}_{j,\ell}} \leqslant 2^{-\tilde{\alpha}\ell} \quad \text{avec} \quad \tilde{\alpha} = \min\{\alpha, \beta, \alpha+\beta-1\} - 1/2.$$

Étape 2

$$\mathcal{B}_{j,\ell} := \Omega_{K,\alpha,\tau_{j-1}} \cap \{\ell_j^* > \ell\}$$

alors

$$\mathbb{P}(\Delta\tau_j = +\infty | \Omega_{K,\alpha,\tau_{j-1}}) = \mathbb{P}(\text{succès de l'étape 1 } | \Omega_{K,\alpha,\tau_{j-1}}) \prod_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathcal{B}_{j,\ell} | \mathcal{B}_{j,\ell-1})$$

On applique le lemme 2 sur les intervalle $\mathrm{I}_{j,\ell}$ en utilisant le fait que si $\alpha > \frac{1}{2} \vee \left(\frac{3}{2} - \beta\right)$

$$\|g^{(s)}\|_{\mathrm{I}_{j,\ell}} \leqslant 2^{-\tilde{\alpha}\ell} \quad \text{avec} \quad \tilde{\alpha} = \min\{\alpha, \beta, \alpha+\beta-1\} - 1/2.$$

- $\boxed{\mathbb{P}(\mathcal{B}_{j,\ell} | \mathcal{B}_{j,\ell-1}) \geqslant 1 - 2^{-\tilde{\alpha}\ell}.}$

Étape 2

$$\mathcal{B}_{j,\ell} := \Omega_{K,\alpha,\tau_{j-1}} \cap \{\ell_j^* > \ell\}$$

alors

$$\mathbb{P}(\Delta\tau_j = +\infty | \Omega_{K,\alpha,\tau_{j-1}}) = \mathbb{P}(\text{succès de l'étape 1 } |\Omega_{K,\alpha,\tau_{j-1}}) \prod_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathcal{B}_{j,\ell} | \mathcal{B}_{j,\ell-1})$$

On applique le lemme 2 sur les intervalle $\mathsf{I}_{j,\ell}$ en utilisant le fait que si $\alpha > \frac{1}{2} \vee \left(\frac{3}{2} - \beta\right)$

$$\|g^{(s)}\|_{\mathsf{I}_{j,\ell}} \leqslant 2^{-\tilde{\alpha}\ell} \quad \text{avec} \quad \tilde{\alpha} = \min\{\alpha, \beta, \alpha+\beta-1\} - 1/2.$$

- $\boxed{\mathbb{P}(\mathcal{B}_{j,\ell} | \mathcal{B}_{j,\ell-1}) \geqslant 1 - 2^{-\tilde{\alpha}\ell}.}$
- $\|g\|_{\mathsf{I}_{j,\ell_j^*}} \leqslant C_\alpha(\ell_j^* + 1) \quad \text{p.s.}$

Borne inférieure sur la probabilité de réussite du couplage

$$\mathbb{P}(\tau_j = +\infty | \tau_{j-1} < +\infty) \geqslant \delta > 0$$

$$\mathbb{P}(\Delta\tau_j = +\infty | \Omega_{K,\alpha,\tau_{j-1}}) \geqslant \delta_0 > 0$$

$$\mathbb{P}(\Omega_{K_\varepsilon,\alpha,\tau_{j-1}} | \tau_{j-1} < +\infty) \geqslant 1 - \varepsilon$$

Borne inférieure sur la probabilité de réussite du couplage

$$\boxed{\mathbb{P}(\tau_j = +\infty | \tau_{j-1} < +\infty) \geqslant \delta > 0}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\Delta\tau_j = +\infty | \Omega_{K,\alpha,\tau_{j-1}}) \geqslant \delta_0 > 0}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\Omega_{K_\varepsilon,\alpha,\tau_{j-1}} | \tau_{j-1} < +\infty) \geqslant 1 - \varepsilon}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\Omega^1_{\alpha,\tau_{j-1}} | \tau_{j-1} < +\infty) = 1}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\Omega^2_{K_\varepsilon,\tau_{j-1}} | \tau_{j-1} < +\infty) \geqslant 1 - \varepsilon}$$

Étape 3

Proposition (Calibrage durée étape 3)

On suppose $(\mathbf{H_1})$ et $(\mathbf{H_2})$. Soit $\alpha \in \left(\frac{1}{2} \vee \left(\frac{3}{2} - \beta\right), \rho\right)$. Supposons que pour tout $j \geqslant 1$,

$$\Delta t_3^{(j)} = t_* \varsigma^j 2^{\theta \ell_j^*} \text{ avec } \theta > (2(\rho - \alpha))^{-1}$$

avec $\varsigma > 1$ arbitraire. Alors pour tout $K > 0$, il existe un choix de t_* tel que, pour tout $j \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(\Omega^1_{\alpha,\tau_j} | \{\tau_j < +\infty\}) = 1.$$

Rappel : Ω^1_{α,τ_j} correspond à

$$\forall n \geqslant 0, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k g_{\tau_j+n-k} \right| \leqslant (n+1)^{-\alpha}$$

Proposition (Retour compact)

On suppose $(\mathbf{H_1})$, $(\mathbf{H_2})$ et $(\mathbf{H_{poly}})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K_\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(\Omega^2_{K_\varepsilon,\tau_j} | \{\tau_j < +\infty\}) \geqslant 1 - \varepsilon. \tag{3.5}$$

Conclusion : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K_\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(\Omega_{K_\varepsilon,\alpha,\tau_j} | \{\tau_j < +\infty\}) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Proposition (Retour compact)

On suppose $(\mathbf{H_1})$, $(\mathbf{H_2})$ et $(\mathbf{H_{poly}})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K_\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(\Omega^2_{K_\varepsilon,\tau_j} | \{\tau_j < +\infty\}) \geqslant 1 - \varepsilon. \tag{3.5}$$

Conclusion : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K_\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(\Omega_{K_\varepsilon,\alpha,\tau_j} | \{\tau_j < +\infty\}) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Finalement, en appliquant en $j-1$ et en prenant (par exemple) $\varepsilon = 1/2$, on a pour tout $j \geqslant 1$,

$$\boxed{\mathbb{P}(\Delta\tau_j = +\infty | \{\tau_{j-1} < +\infty\}) \geqslant \frac{\delta_0}{2}} \tag{3.6}$$

Preuve théorème principal

Soit $j^{(s)} := \inf\{j > 0, \Delta\tau_j = +\infty\}$.

$$\mathbb{P}(\tau_\infty > n) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \Delta\tau_j \mathbb{1}_{\{j^{(s)} > j\}} > n\right).$$

Par Markov et Minkowski ($p \geqslant 1$) ou $|a+b|^p \leqslant |a|^p + |b|^p$ ($0 < p < 1$), on a

$$\mathbb{P}(\tau_\infty > n) \leqslant \frac{1}{n^p} \begin{cases} \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{E}[|\Delta\tau_j|^p \mathbb{1}_{\{j^{(s)} > j\}}] & \text{si} \quad p \in (0,1) \\ \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{E}[|\Delta\tau_j|^p \mathbb{1}_{\{j^{(s)} > j\}}]^{1/p}\right)^p & \text{si} \quad p \geqslant 1. \end{cases}$$

On peut montrer que pour tout $p \in \left(0, \frac{\tilde{\alpha}}{\theta \vee 1}\right)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|\Delta\tau_j|^p \mathbb{1}_{\{j^{(s)}>j\}}] &\leqslant C\varsigma^{jp}\mathbb{P}(j^{(s)} > j-1)\\ &\leqslant C\varsigma^{jp}\left(1-\frac{\delta_0}{2}\right)^{j-1}\end{aligned}$$

On peut montrer que pour tout $p \in \left(0, \frac{\tilde{\alpha}}{\theta \vee 1}\right)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\Delta\tau_j|^p \mathbb{1}_{\{j^{(s)}>j\}}] &\leqslant C\varsigma^{jp}\mathbb{P}(j^{(s)} > j-1) \\ &\leqslant C\varsigma^{jp}\left(1-\frac{\delta_0}{2}\right)^{j-1} \end{aligned}$$

Conclusion : on choisit $1 < \varsigma < \left(1-\frac{\delta_0}{2}\right)^{-1/p}$ et on optimise la borne supérieure de p pour obtenir la vitesse $v(\beta, \rho)$ du théorème.

Merci de votre attention !

Étape 1

À un instant $(n+1)$, on veut construire $(\xi^1_{n+1}, \xi^2_{n+1})$ pour que $X^1_{n+1} = X^2_{n+1}$, i.e.

$$F\left(X^1_n,\ \xi^1_{n+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \xi^1_{n+1-k}\right) = F\left(X^2_n,\ \xi^2_{n+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \xi^2_{n+1-k}\right)$$

Lemme 1 (inspiré de version continue J.Fontbona & F.Panloup)

Soit $K > 0$ et $\mu := \mathcal{N}(0, I_d)$. Sous $(\mathbf{H_2})$, il existe $\tilde{K} > 0$, tel que pour tout $(x, x', y, y') \in B(0, K)^4$, on peut construire (Z_1, Z_2) tel que

(i) $\mathcal{L}(Z_1) = \mathcal{L}(Z_2) = \mu$,

(ii) il existe $\delta_{\tilde{K}} > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(F(x, Z_1 + y) = F(x', Z_2 + y')) \geqslant \delta_{\tilde{K}} > 0 \tag{3.7}$$

(iii) il existe $M_K > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(|Z_2 - Z_1| \leqslant M_K) = 1. \tag{3.8}$$

Étape 1

On veut coupler à l'instant $\tau_{j-1}+1 \Longrightarrow$ on applique le lemme 1 avec $(x,x',y,y') := \left(X^1_{\tau_{j-1}},\ X^2_{\tau_{j-1}},\ \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \xi^1_{\tau_{j-1}+1-k},\ \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \xi^2_{\tau_{j-1}+1-k}\right)$ et on pose

$$(\xi^1_{\tau_{j-1}+1}, \xi^2_{\tau_{j-1}+1}) = (\mathbb{1}_{\Omega_{K,\alpha,\tau_{j-1}}} Z_1 + \mathbb{1}_{\Omega^c_{K,\alpha,\tau_{j-1}}} \xi, \quad \mathbb{1}_{\Omega_{K,\alpha,\tau_{j-1}}} Z_2 + \mathbb{1}_{\Omega^c_{K,\alpha,\tau_{j-1}}} \xi)$$

où $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ indépendante de (Z_1, Z_2).

- $\mathbb{P}(\text{succès de l'étape } 1 | \Omega_{K,\alpha,\tau_{j-1}}) \geqslant \delta_K > 0$
- $\left|g_{\tau_{j-1}}\right| = |\xi^1_{\tau_{j-1}+1} - \xi^2_{\tau_{j-1}+1}| \leqslant M_K \quad p.s$

On pose $\mathcal{A}_{j,\ell} := \{$échec étape 2 de la tentative j après ℓ essais exactement$\}$

$$\mathbb{E}[|\Delta\tau_j|^p \mathbb{1}_{\{\Delta\tau_j<+\infty\}} \mid \{\tau_{j-1} < +\infty\}]$$
$$= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathcal{A}_{j,\ell}} |\Delta\tau_j|^p \mathbb{1}_{\{\Delta\tau_j<+\infty\}} \mid \{\tau_{j-1} < +\infty\}].$$

Sur l'événement $\mathcal{A}_{j,\ell}$,

$$\Delta\tau_j = c_2 2^{\ell+1} + \Delta t_3^{(j)} \leqslant C\varsigma^j 2^{(\theta\vee 1)\ell}.$$

De plus, d'après le lemme de couplage de l'étape 2,

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_{j,\ell} \mid \{\tau_{j-1} < +\infty\}) = \mathbb{P}(\mathcal{B}_{j,\ell}^c | \mathcal{B}_{j,\ell-1}) \leqslant 2^{-\tilde{\alpha}\ell}$$

donc

$$\mathbb{E}[|\Delta\tau_j|^p \mathbb{1}_{\{\Delta\tau_j<+\infty\}} \mid \{\tau_{j-1} < +\infty\}] \leqslant C\varsigma^{jp} \Longleftarrow p \in \left(0, \frac{\tilde{\alpha}}{\theta\vee 1}\right).$$