Gaz de Coulomb dans le plan

François Bolley

Laboratoire de probabilités, Univ. Paris 6

D. Chafaï (Dauphine), J. Fontbona (Santiago)

Soit n particules X_t^i, $1 \leq i \leq n$ dans $\mathbb{R}^2$ évoluant suivant

$$dX_t^i = \sqrt{2}\, dB_t^i - \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} \nabla W(X_t^i - X_t^j)\, dt$$

pour $W(x) = -\ln|x|$ solution fondamentale du Laplacien, soit (force répulsive)

$$dX_t^i = \sqrt{2}\, dB_t^i + \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2}\, dt$$

3 questions

1. n fixé, système bien posé ?
2. Mesure invariante, limite $t \to +\infty$?
3. Limite $n \to +\infty$?

Limite de champ moyen ($n \to +\infty$, W général dans $\mathbb{R}^2$)

$$dX_t^i = \sqrt{2}\, dB_t^i - \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} \nabla W(X_t^i - X_t^j)\, dt = \sqrt{2}\, dB_t^i - \nabla W * \hat{\mu}_t^n(X_t^i) dt$$

pour la mesure empirique $\hat{\mu}_t^n = n^{-1} \sum_{i=1}^n \delta_{X_t^i}$.

Pour des particules échangeables on s'attend à

$$\hat{\mu}_t^n \;\approx\; \mathbb{E}\, \hat{\mu}_t^n = loi(X_t^1) \;\approx\; \mu_t$$

$$X_t^1 \approx X_t, \quad dX_t = \sqrt{2}\, dB_t - \nabla W * \mu_t(X_t)\, dt \quad \mu_t = loi(X_t).$$

W régulier
McKean, Sznitman, Benachour-Roynette-Vallois, Malrieu, Herrmann-Tugaut

W attractif, $W(x) = k \ln|x|$ dans $\mathbb{R}^2$
seuil $k = 4$ dans l'EDP sur μ_t (Keller-Segel) : Fournier-Jourdain, Cattiaux-Pédèches

Tourbillons pour Navier-Stokes (force $\nabla^\perp W$) : Fontbona-Jourdain après Gallay-Wayne

ici : W répulsif

Même $W(x) = -k \ln|x|$ dans $\mathbb{R}$: Brownien de Dyson (vp de matrices hermitiennes à cœfficients browniens), Cépa-Lépingle, Cabanal Duvillard - Guionnet, Rogers-Shi

Notre système

$$dX_t^i = \sqrt{\frac{2n}{\beta}}\, dB_t^i - 2\, X_t^i\, dt + \frac{2}{n} \sum_{j \neq i} \frac{X_t^i - X_t^j}{|X_t^i - X_t^j|^2}\, dt$$

dans

$$D = \{x = (x^1, \ldots, x^n) \in (\mathbb{R}^2)^n ; x^i \neq x^j, i \neq j\}$$

pour un $\beta = \beta_n$, soit pour $X = (X^1, \ldots, X^n), B = (B^1, \ldots, B^n)$

$$dX_t = \sqrt{\frac{2n}{\beta}}\, dB_t - n \nabla H(X_t)\, dt$$

avec

$$H(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x^i|^2 + \frac{1}{2n^2} \sum_{i \neq j} \ln \frac{1}{|x^i - x^j|^2}$$

Proba invariante (symétrique) sur $\mathbb{R}^{2n}$ de densité :

$$P^n(x) = \frac{1}{Z_n} e^{-\beta\, H(x)} = \frac{1}{Z_n}\, e^{-\frac{\beta}{n} \sum_i |x^i|^2} \prod_{i<j} |x^i - x^j|^{2\beta/n^2}$$

Le choix $\beta = n^2$ correspond à l'ensemble de Ginibre complexe en matrices aléatoires.

Convergence à l'équilibre - $H : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ général

De manière générale dans $\mathbb{R}^d$ soit

$$dX_t = \sqrt{2}\,dB_t - \nabla H(X_t)\,dt$$

de mesure invariante e^{-H}. Convergence de $loi(X_t)$ vers e^{-H} ?

Par exemple, pour la variance, l'inégalité de Poincaré

$$\int (f-1)^2 e^{-H} \leq \frac{1}{c}\int |\nabla f|^2 e^{-H}, \quad \int f e^{-H} = 1$$

implique

$$\int \Big(\frac{loi(X_t)}{e^{-H}} - 1\Big)^2 e^{-H} \leq e^{-2ct} \int \Big(\frac{loi(X_0)}{e^{-H}} - 1\Big)^2 e^{-H}.$$

En effet $f_t = loi(X_t)/e^{-H}$ vérifie $\partial f_t/\partial t = L f_t$ pour $L = \Delta - \nabla H \cdot \nabla$

$$\frac{d}{dt}\int (f_t-1)^2 e^{-H} = 2\int (f_t - 1) L f_t\, e^{-H} = -2\int |\nabla f_t|^2 e^{-H} \leq -2c \int (f_t-1)^2 e^{-H}.$$

Critères pour l'inégalité de Poincaré :

1. convexité : H convexe (Bakry-Émery, Ledoux, Bobkov, etc)

Ici $H(x) = |x|^2/n + \frac{1}{2n^2}\sum_{i\neq j} W(x^i - x^j)$ avec $W(z) = -\ln|z|^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Or $\nabla^2 W(z)$ a pour vp $\pm 2/|z|^2$. Prendre $x^2, \ldots, x^n$ fixés et $x^1 \to x^2$.
En dimension 1 (GUE) on peut ordonner les valeurs propres et obtenir de la convexité.

2. perturbation

3. tensorisation
Ici la proba P^n n'est pas une mesure produit (particules dépendantes) à n fixé - mais découplage pour $n \to +\infty$.

4. fonction de Liapounov (Meyn-Tweedie) : on construit une fonction $W > 0$ telle que $LW/W \leq -a + b1_K$ pour $a, b > 0, K$ compact. En effet pour $a = 1, b = 0$, $g = f - 1$

$$\begin{aligned}\int g^2 e^{-H} &\leq \int g^2 \frac{-LW}{W} = -\int \frac{g^2}{W} LW e^{-H} = \int \nabla \frac{g^2}{W} \cdot \nabla W e^{-H} \\ &= \int \frac{2gW\nabla g - g^2 \nabla W}{W^2} \cdot \nabla W e^{-H} = \int \left[|\nabla g|^2 - \left| \nabla g - g\frac{\nabla W}{W} \right|^2 \right] e^{-H}\end{aligned}$$

Ici on prend $W = e^{cH}$ pour c petit.

La méthode de Liapounov assure une inégalité de Poincaré pour la mesure invariante P^n sur $\mathbb{R}^{2n}$, mais avec une constante dépendant fortement de n.

Remarque : pour $\beta = n^2$ la loi d'une particule parmi n à l'équilibre (première marge de P^n) vérifie une telle inégalité avec une constante uniforme en n.

En effet la loi à une particule a pour densité

$$\frac{1}{\pi} e^{-U(\sqrt{n} z)} \quad \text{avec} \quad U(z) = |z|^2 - \ln \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|z|^{2i}}{i!} \quad \text{convexe}$$

dans $\mathbb{R}^2$.

Un résultat dû à Bobkov assure alors que la constante de Poincaré est contrôlée par le second moment de la mesure, qu'on vérifie être uniforme en n par un calcul direct sur la densité ou grâce à l'interprétation à l'aide de l'ensemble de Ginibre complexe.

Questions ouvertes

1. Bonne constante dans l'inégalité de Poincaré - ou Sobolev logarithmique

2. Transport optimal / couplage ? Li - Li - Xie, Donati-Martin - Groux - Maïda en dimension un

3. Limites $n, t \to +\infty$

$$loi(X_t^1, \ldots, X_t^n) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} P^n \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \hat{\mu}_t^n & \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} & \hat{\mu}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mu_t & \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} & \mu_\infty \end{array}$$

pour une solution μ_t de l'EDP non-linéaire associée et μ_∞ son équilibre (mesure uniforme sur le disque dans le cas $\beta = n^2$)