Mesures de Gibbs *vs.* g-mesures

Arnaud Le Ny[(1)]

[(1)] Université Paris Est Créteil- Val de Marne (UPEC)
(Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, LAMA - UMR CNRS 8050)

Journées de Probabilités 2017,

Aussois, jeudi 22 juin 2017, 10h30-11h15

Références

Courte bibliographie – Chronologie

[Dob68] R. Dobrushin. TPA **13**, 1968.
The Description of a Random Field by Means of Conditional Probabilities and Conditions of its Regularity.

[LR69] O. Lanford, D. Ruelle. CMP **13**, 1969.
Observables at Infinity and States with Short Range Correlations in Statistical Mechanics.

[Dob72] R. Dobrushin. TPA **17**, 1972.
Gibbs state describing the coexistence of phases in the $3d$ Ising model.

[G80] S. Goldstein. *Remarks on the Global Markov Property.* CMP **74**, 1980.

[F80] H. Föllmer. *On the Global Markov Property.* Springer NY, 1980.

[AHKO81] : S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn, G. Olsen. JMA **11**,1981.
The Global Markov Property for Lattice Systems.

[FP97] : R. Fernández, C.-E. Pfister. AP **25**, 1997.
Global Specification and non-Quasilocality of Projections of Gibbs Measures.

[CFMP05] : M. Cassandro, P. Ferrari, I. Merola, E. Pressuti. JMP **46**, 2005.
Geometry of Contours and Peierls Estimate in $d = 1$ Ising Models with Long-Range Interactions.

[CMPR14] : M. Cassandro, I. Merola, P. Picco, U. Rozikov. CMP **327**, 2014.
One-Dimensional Ising Models with Long Range Interactions : Cluster Expansions, Phase-Separating point.

[LP16] : J. Littin, P. Picco. Preprint 2016.
Quasi-Additive Estimates on the Hamiltonian for the One-Dimensional Long-Range Ising Model.

[CMP17] M. Cassandro, I. Merola, P. Picco. JSP **167**, 2017.
Phase Separation for the Long-Range One-Dimensional Ising Model.

[BEELN17] : R. Bissacot, E. Endo, A. van Enter, A. Le Ny. ArXiv 2017.
Entropic Repulsion and Lack of the g-measure Property for Dyson Models.

[BFV17] : S. Berghout, R. Fernández, E. Verbitskiy. Preprint 2017.
On the Relation Between Gibbs and g-measures.

Programme de l'exposé

1. Cadre DLR en mécanique statistique mathématique
2. Modèles d'Ising (proche-voisins) en dimensions 2 et 3
3. Modèle d'Ising à longue portée sur $\mathbb{Z}$
4. Absence de g-mesure pour μ_β^+ à basse température
5. Perspectives

Programme de l'exposé

1. Cadre DLR en mécanique statistique mathématique
2. Modèles d'Ising (proche-voisins) en dimensions 2 et 3
3. Modèle d'Ising à longue portée sur $\mathbb{Z}$
4. Absence de g-mesure pour μ_β^+ à basse température
5. Perspectives

Espaces probabilisés produits infinis

Configurations : $\sigma, \omega \in (\Omega, \mathcal{F}, \rho) := (E, \mathcal{E}, \rho_0)^{\otimes S}, \ \omega = (\omega_i)_{i \in S}, \omega_i \in E$

Réseau infini : $S = \mathbb{Z}^d, \ \mathbb{Z}^2, \ \mathbb{Z}, \ \mathcal{T}^k$, etc. $\mathcal{S} = \Big\{ \Lambda \in S, \ |S| < \infty \Big\}$

Espace d'états : $E = \{-1, +1\}, \ \mathcal{E} = \mathcal{P}\big(E\big), \ \rho_0 = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_{+1}$

Topologie : Base de voisinages de $\sigma \in \Omega$: $\big(\mathcal{N}_\Lambda(\sigma)\big)_{\Lambda \in \mathcal{S}}$ avec

$$\mathcal{N}_\Lambda(\sigma) = \Big\{ \omega \in \Omega, \ \omega_\Lambda = \sigma_\Lambda, \ \omega_{\Lambda^c} \text{ arbitraire} \Big\}$$

Sous-voisinages particuliers : couronnes $\Delta \subset \Lambda$, $\Delta \in \mathcal{S}$

$$\mathcal{N}^{\pm}_{\Lambda,\Delta}(\sigma) = \Big\{ \omega \in \mathcal{N}_\Lambda(\sigma), \ \omega_{\Delta \setminus \Lambda} = \pm_{\Delta \setminus \Lambda}, \omega_{\Delta^c} \text{ arbitraire} \Big\}$$

Continuité : $f \in C(\Omega) \Longleftrightarrow \lim_\Lambda \sup_{\sigma_\Lambda = \omega_\Lambda} |f(\sigma) - f(\omega)| = 0$

Mesures DLR : Transitions de phases en méca. stat.

Spécifications : Noyaux $\gamma = (\gamma_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{S}}; \gamma_\Lambda : \mathcal{F}_{\Lambda^c} \times \Omega_\Lambda \longmapsto [0,1]$ tq :

1. $\forall A \in \mathcal{F}$, l'application $\gamma_\Lambda(A|\cdot)$ est $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$-*mesurable*.
2. $\forall \omega \in \Omega$, l'application $\gamma_\Lambda(\cdot|\omega)$ est une *probabilité sur* $(\Omega_\Lambda, \mathcal{F}_\Lambda)$.
3. *Propreté :* $\gamma_\Lambda(B|\omega) = \mathbf{1}_B(\omega), \; \forall B \in \mathcal{F}_{\Lambda^c}$ (ω cond. aux bords).
4. *Cohérence DLR :* $\Lambda \subset \Lambda' \in \mathcal{S}, \implies \gamma_{\Lambda'}\gamma_\Lambda = \gamma_{\Lambda'}$

Mesures DLR : $\mu \in \mathcal{G}(\gamma) \iff \mu\gamma_\Lambda = \mu, \; \forall \Lambda \in \mathcal{S}$

Écriture alternative : $\forall \Lambda \in \mathcal{S}, \; \mu[\cdot|\mathcal{F}_{\Lambda^c}](\omega) = \gamma_\Lambda(\cdot|\omega), \; \mu$-a.e.$(\omega)$

Actions des noyaux : $\forall \Lambda, \; \Lambda' \in \mathcal{F}, \; \forall A \in \mathcal{F}, \; \forall \omega \in \Omega,$

$$\gamma_\Lambda\gamma_{\Lambda'}(A|\omega) = \int_\Omega \gamma_{\Lambda'}(A|\sigma)\gamma_\Lambda(d\sigma|\omega), \; \mu\gamma_\Lambda(A) = \int_\Omega \gamma_\Lambda(A|\omega)\mu(d\omega)$$

États d'équilibre à volume fini : Boltzmann-Gibbs

$$\sigma_\Lambda \in (\Omega_\Lambda, \mathcal{F}_\Lambda, \rho_\Lambda),\ \mu_\Lambda \in \mathcal{M}_1^+(\Omega),\ \Phi = (\Phi_A)_{A\in\mathcal{S}},\ H_\Lambda(\sigma) = \sum_{A\subset\Lambda} \Phi_A(\sigma)$$

"Poids" de Boltzmann-Gibbs : $\nu_\Lambda^\beta(\sigma_\Lambda) = \frac{1}{Z_\Lambda^\beta} e^{-\beta H_\Lambda(\sigma)},\ \beta = \frac{1}{T}$

"2^d principe" : l'état d'équilibre minimise l'énergie libre $F = U - TS$

- Energie $U := \mathbb{E}_\mu[H_\Lambda] = \sum_{\sigma_\Lambda\in\Omega_\Lambda} H_\Lambda(\sigma)\mu_\Lambda(\sigma)$
- Entropie $S := S_\Lambda(\mu) = -\sum_{\sigma_\Lambda\in\Omega} \mu_\Lambda(\sigma)\ln\mu_\Lambda(\sigma)$
- Energie libre $\mathcal{F}_\Lambda(\mu) := \mathbb{E}_\mu[H_\Lambda] - \frac{1}{\beta} S_\Lambda(\mu)$

Conflit énergie-entropie résolu par ν^β

Entropie relative : $\mathcal{H}_\Lambda(\mu|\nu) := \sum_\sigma \mu_\Lambda(\sigma)\ln\frac{\mu(\sigma)}{\nu(\sigma)} \geq 0$

$$\mathcal{H}_\Lambda(\mu|\nu^\beta) = \mathcal{F}_\Lambda(\mu) + \frac{1}{\beta}\ln Z_\Lambda^\beta \geq 0, \quad = 0 \text{ ssi } \mu = \nu^\beta$$

L'énergie libre est minimale pour ν_Λ^β (et vaut alors $-\frac{1}{\beta}\ln Z_\Lambda^\beta$)

États d'équilibre à volume infini : Mesures de Gibbs

Hamiltonien à conditions aux bords ω :

$$H_\Lambda^\Phi(\sigma|\omega) = \sum_{A\cap\Lambda\neq\emptyset} \Phi_A(\sigma_\Lambda\omega_{\Lambda^c})$$

où Φ est un potentiel **U.A.C.** ($\sum_{A\cap\Lambda\neq\emptyset} \sup_\Omega |\Phi_A(\omega)| < +\infty$)

Specification de Gibbs $\gamma^{\beta\Phi} = (\gamma_\Lambda^{\beta\Phi})_{\Lambda\in\mathcal{S}}$

$$\gamma_\Lambda^\beta(d\sigma|\omega) := \frac{1}{Z_\Lambda^\beta(\omega)} e^{-\beta H_\Lambda(\sigma|\omega)} \rho_\Lambda \otimes \delta_{\omega_{\Lambda^c}}(d\sigma)$$

Mesure de Gibbs : $\mu \in \mathcal{G}(\gamma^{\beta\Phi})$, Φ **UAC**

- Transition de phase si $|\mathcal{G}(\gamma^{\beta\Phi})| > 1$
- Convexe $\mathcal{G}(\gamma^{\beta\Phi})$ est un simplexe de Choquet (*Dynkin*)

Principes variationnels

Entropie relative spécifique :

$$h(\mu|\nu) := \lim_{\Lambda \uparrow \mathcal{S}} \frac{1}{|\Lambda|} \mathcal{H}_\Lambda(\mu|\nu) \;\geq 0 \text{ lorsque la limite existe}$$

Principe variationnel (version "spécification")

Φ U.A.C. **invariant par translation**, $\nu \in \mathcal{G}_{\text{inv}}(\gamma^{\beta\Phi})$, $\mu \in \mathcal{M}^+_{\text{inv}}(\Omega)$

$$h(\mu|\nu) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu \in \mathcal{G}(\gamma^{\beta\Phi})$$

Autres versions : Principes variationnels "thermodynamiques", pression et entropie relative convexes conjuguées, ré-écriture du second principe de la thermodynamique, grandes déviations etc.

Mesures de Gibbs et mesures quasilocales

Champs de Markov : potentiel aux proches voisins

Les probabilités conditionnelles $\mu\left[\sigma_\Lambda | \mathcal{F}_{\Lambda^c}\right](\omega)$ sont $\mathcal{F}_{\partial\Lambda}$-mesurables

Mesures quasilocales : *Almost Markovian* (Sullivan, 1976)

$$\mu \in \mathcal{G}(\gamma) \text{ telle que } f \in C(\Omega) \implies \gamma_\Lambda f \in C(\Omega)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$\exists$ versions continues des probabilités conditionnelles sachant $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$

***Kozlov 1974* : Gibbs $\Longleftrightarrow$ Quasilocale et non-nulle**

Principe variationnel pour γ quasilocale (2004)

Si $\nu \in \mathcal{G}_{\text{inv}}(\gamma)$ et $\mu \in \mathcal{M}_{\text{inv}}(\Omega)$, $h(\mu|\nu) = 0 \Longleftrightarrow \mu \in \mathcal{G}_{\text{inv}}(\gamma)$

Mesures quasilocales : bon cadre de description des états d'équilibre

Programme de l'exposé

1. Cadre DLR en mécanique statistique mathématique
2. Modèles d'Ising (proche-voisins) en dimensions 2 et 3
3. Modèle d'Ising à longue portée sur $\mathbb{Z}$
4. Absence de g-mesure pour μ_β^+ à basse température
5. Perspectives

Spécifications d'Ising à température $\beta^{-1} > 0$

$$H_\Lambda^\Phi(\sigma|\omega) = \sum_{A\cap\Lambda\neq\emptyset} \Phi_A(\sigma_\Lambda\omega_{\Lambda^c}),\ \Phi_{\{i,j\}}(\omega) = -J(i,j)\omega_i\omega_j,\ \Phi_{\{i\}}(\omega) = -h_{(i)}\omega_i)$$

- `Proche-voisins` $(d = 2, 3)$: $J(i,j) = J > 0$ *iff* $|i - j| = 1$.
- `Longue portée` $(d = 1)$: $J(i,j) = \frac{J}{|i-j|^\alpha}$, $\forall i \neq j \in \mathbb{Z}$, $\alpha > 1$.

Transition de phase à basse T : $\exists \beta_c(d) > 0$ ou $\beta_c(\alpha) > 0$ t.q.

- *Cas proche-voisins* $d = 2$: $\mathcal{G}(\gamma^{I,\beta}) = [\mu_\beta^-, \mu_\beta^+]$ pour $\beta > \beta_c(2)$.
- *Cas proche-voisins* $d = 3$: Dobrushin b.c......$\mu^\pm \in \mathrm{ex}\mathcal{G}(\gamma) \setminus \mathcal{G}_{\mathrm{inv}}(\gamma)$
- *Longue portée* $d = 1$: $\mathcal{G}(\gamma^{D,\beta}) = [\mu_\beta^-, \mu_\beta^+]$ pour $\beta > \beta_c(\alpha)$, $\alpha \leq 2$.

Monotonie : $\mu_\beta^-(\cdot) := \lim_{\Lambda\uparrow\mathcal{S}} \gamma_\Lambda^{I,\beta}(\cdot|-) << \mu_\beta^+(\cdot) := \lim_{\Lambda\uparrow\mathcal{S}} \gamma_\Lambda^{I,\beta}(\cdot|+)$

Interfaces d'Ising en dimensions $2, 3$, basse T

Conditions aux bords de Dobrushin τ, $\mu^{\pm}(\cdot) := \lim_{\Lambda_n \uparrow \mathcal{S}} \gamma_{\Lambda_n}^{I,\beta}(\cdot|\tau)$

$d = 2$: $\tau_i = -1$ si $i \leq 0$ et $\tau_i = +1$ si $i > 0$

- *Gallavotti* (1972) : interface instable à fluctuations $O(\sqrt{n})$
- *Aizenman-Higuchi* (1979/80) : $\mu^{\pm} = \frac{1}{2}\mu^{-} + \frac{1}{2}\mu^{+} \in \mathcal{G}(\gamma^I)$
- *Greenberg-Ioffe (2005)* : Principe d'invariance, pont brownien.

(Localement, typiquement de μ^+ ou de μ^-, sans coexistence).

$d = 3$: Pour chaque plan π, conditions aux bords $\tau = \pm 1$

Dobrushin (1972) *van Beijeren* (1975) : interface localisé, fluctuations $O(1)$. Près de l'interface, coexistence ressentie. L'état de Dobrushin $\mu_\pi^{\pm}$ et ses translatés sont extrémaux et non invariants par translation.

(Localement, typiquement coexistence près de l'interface, μ^+ vers le haut, μ^- vers le bas).

Markov locale (unilatère) vs. Markov globale (bilatère)

Goldstein (1980), *Föllmer* (1980), *Albeverio et al.* (1981), *Zergarlinski* (1987) , *von Weizsäcker* (1980), *Fernández/Pfister* (1997)

Markov *locale* : $\mu \in \mathcal{G}(\gamma) \Longrightarrow \mu\big[\sigma_\Lambda | \mathcal{F}_{\Lambda^c}\big](\omega) \; \in \mathcal{F}_{\partial^{(r)}\Lambda}, \; \forall \Lambda \in \mathcal{S}$

Markov *globale* : $\mu \in \mathcal{G}(\gamma) \Longrightarrow \mu\big[\sigma_\Lambda | \mathcal{F}_{\Lambda^c}\big](\omega) \; \in \mathcal{F}_{\partial^{(r)}\Lambda}, \; \forall \Lambda \subset S$

Un champ de Markov sans la propriété globale pour $d = 3$

Reflexion T : $(i_1, i_2, i_3) \longrightarrow (i_1, i_2, -i_3)$, identité sur $\{i_3 = 0\}$

$$\mu := \frac{1}{2}\mu^\pm + \frac{1}{2}T\mu^\pm$$

ne satisfait pas Markov globale (fausse pour $\Lambda = F \in \mathcal{F}_{i_3>0}$).

Spécifications globales - cas attractif

Q. : Est-il possible d'étendre γ à toute partie S, non finie, de sorte que les probabilités conditionnelles sachant $\mathcal{F}_{S^c}$ soient fournies par la nouvelle spécification Γ ? Si oui quelle expression pour Γ.

R. : pas nécessairement, surtout en cas de transition de phase, des problèmes de choix mesurables apparaissent. Réponse positive en cas de monotonie et continuité dans certaines directions [FP97]

Cas attractif : spécification globale Γ^+ s.t. $\mathcal{G}(\Gamma^+) = \{\mu^+\}$

Specification contrainte : $\gamma^{S,\omega}$, $\gamma_\Delta^{S,\omega}(\cdot|\eta) := \gamma_\Delta^I(\cdot|\eta_S\omega_{S^c})$

Limite faible monotone : $\mu_S^{+,\omega}(\cdot) := \lim_{\Delta\uparrow S} \gamma_\Delta^{S,\omega}(\cdot|+) \in \mathcal{G}(\gamma^{S,\omega})$

On définit $\quad \Gamma_S^+(d\eta|\omega) := \mu_S^{+,\omega}(d\eta_S) \otimes \delta_{\omega_{S^c}}(d\eta_{S^c}),\ \mathcal{G}(\Gamma^+) = \{\mu^+\}$

Programme de l'exposé

1. Cadre DLR en mécanique statistique mathématique
2. Modèles d'Ising (proche-voisins) en dimensions 2 et 3
3. Modèle d'Ising à longue portée sur $\mathbb{Z}$
4. Absence de g-mesure pour μ_β^+ à basse température
5. Perspectives

Kac-Thomson (1969), *Dyson* (1969), *Frölich-Spencer* (1982), *Cassandro et al.* (2005 – 2009 – 2012 – 2014 – 2017), *Littin-Picco* (2016/17)

Potentiel à décroissance polynomiale $1 < \alpha \leq 2$

$$\gamma_\Lambda^D(d\omega|\tau) = \frac{1}{Z_\Lambda^\tau} \, e^{\beta \sum_{i \neq j, i \in \Lambda, j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|i-j|^\alpha} \omega_i \omega_j} \, \rho_\Lambda \otimes \delta_{\tau_{\Lambda^c}}(d\omega)$$

- Transition de phase à basse température (via *contours et triangles*) : $\mathcal{G}(\gamma^D) = [\mu_\beta^-, \mu_\beta^+]$
- Unicité pour champs magnétiques homogènes $h_i = \pm h, \ \forall i \in \mathbb{Z}$.
- Phase intermédiaire et effet Kosterlitz-Thouless pour $\alpha = 2$ (*Imbrie/Newman* (1982)).
- Transition de phase pour le RFIM pour $\alpha > \frac{3}{2}$ [COP09].

Absence d'interface stable – interface "mésoscopique"

Cassandro et al. 2014 : Dobrushin b.c. et interface I^* réduit à un point (bien défini) pour $\alpha_+ < \alpha < 2$, (borne inf. technique)

μ^{-+} : Dobrushin b.c. dans la boîte $\Lambda_L = [-L, +L]$:

Contrôle des déviations de l'interface pour $\alpha \in (\alpha_+, 2)$

$\exists \beta_1(\alpha)$ t.q. $\beta > \beta_1(\alpha)$, $\exists \varepsilon(\beta) > 0, L(\varepsilon) \geq 1$ t.q. pour tout $L > L(\varepsilon)$,

$$\mu_{\Lambda_L}^{-+}\left[|I^*| > \varepsilon L\right] \leq 3(1-\varepsilon) L e^{-CL^{2-\alpha}(1+o(L))},$$

avec $C \equiv C(\alpha, \beta, \varepsilon)$ constante positive.

"Répulsion entropique"

$\exists \beta_2 > \beta_1$ t.q. pour $\beta > \beta_2$, $\exists \varepsilon = \varepsilon(\beta)$, $L_0(\alpha, \beta) > L(\varepsilon)$ t.q. pour $L > L_0$, si $N > L$ et $LN^{1-\alpha} = o(1)$ alors ,

$$\mu^+[\omega_i | -_{-N,-1}] \leq -\frac{m}{2}$$

pour $m = m(\beta) > 0$ et tout $i \in [-N - \frac{(1-\varepsilon)}{2} L, -N-1] \cup [0, \frac{(1-\varepsilon)}{2} L]$.

Programme de l'exposé

1. Cadre DLR en mécanique statistique mathématique
2. Modèles d'Ising (proche-voisins) en dimensions 2 et 3
3. Modèle d'Ising à longue portée sur $\mathbb{Z}$
4. Absence de g-mesure pour μ_β^+ à basse température
5. Perspectives

g-functions and g-measures (Keane 1972)

Chains with complete connections (Ornicescu/Mihoc 1935), à liaisons complètes (Doeblin/Fortet 1937), with infinite order (Harris 1955), Variable Length Markov Chains (Rissanen 1983) uniform martingales (Kalikow 1990).

Markov : Conditionnement unilatère :

$$\mu[\sigma_1|\mathcal{F}_{\leq 0}](\sigma) = \mu[\sigma_0|\mathcal{F}_{\{0\}}](\sigma)" = "\mu[\sigma_1|\sigma_0] = P(\sigma_0, \sigma_1).$$

soit $\mu[\sigma_1|\mathcal{F}_{(>0)^c}] = \mu[\sigma_1|\mathcal{F}_{S^c}]$, $S =]0, +\infty[$ **n'est pas** un ensemble fini.

g-mesures : consistente avec une g-fonction **continue**

- $g : \Omega \longmapsto [0,1]$ normalisée et $\mathcal{F}_{<0}$-mesurable.
- g-mesure ν ssi il existe une g-fonction g_0 telle que $\nu g_0 = \nu$, *i.e.* for μ a.e. ω, $\nu[\omega_0|\mathcal{F}_{<0}](\omega) = g_0(\omega)$.

Question : $\mu^+ \in \mathcal{G}(\gamma^D),\ d = 1,\ \alpha \in (1,2)$ **est-elle une g-mesure ?**

Description unilatère de $\mu^+ \in \mathcal{G}(\gamma^D)$

g-fonction candidate : g^+ à partir de la spécification globale Γ^+

$$g^+(\omega) := \mu^+\left[\omega_0 | \mathcal{F}_{<0}\right](\omega) = \Gamma^+_{\mathbb{Z}_+}[\omega_0|\omega] = \lim_{I \in \mathcal{S}, I \uparrow \mathbb{Z}_+} \gamma_I^D \left(\cdot \mid +_{\mathbb{Z}_+}\omega_{\mathbb{Z}_+^c}\right)$$

g^+ : aimantation sous un modèle de Dyson à même portée sur $\mathbb{Z}^+$, avec un *champ extérieur aléatoire inhomogène* $h_x[\omega]$ dont l'aléa ω est de loi....μ^+.

Discontinuité essentielle en $\omega = \omega_{\text{alt}}$, avec $(\omega_{\text{alt}})_i = (-1)^i$

Pour un modèle de Dyson à basse température et exposant $\alpha_+ < \alpha < 2$, pour $N >> L$ grands, tels que $LN^{1-\alpha} = \circ(1)$,

$$\forall \omega^\pm \in \mathcal{N}^\pm_{N,L}(\omega_{\text{alt}}), \ \left| \mu^{+,\omega^+}_{\mathbb{Z}_+}[\sigma_0] - \mu^{+,\omega^-}_{\mathbb{Z}_+}[\sigma_0] \right| > \delta.$$

Conséquence : μ^+ n'est pas une g-mesure.

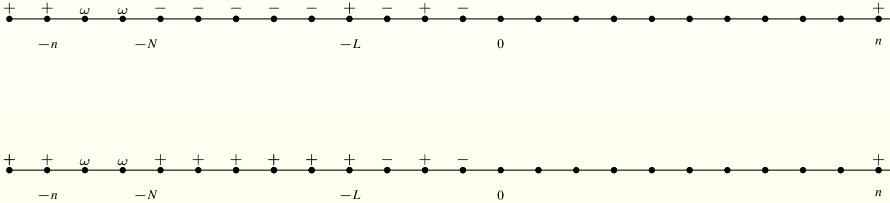


Figure 1 : Left $\pm$ Neighborhoods of ω_{alt}

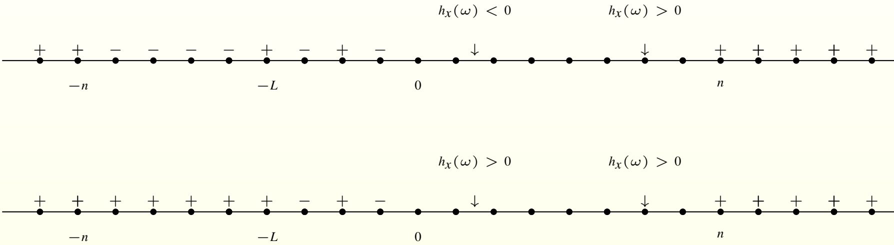


Figure 2 : Inhomogeneous ω-dependent external fields

"Wetting transition and entropic repulsion"

Cassandro *et al.* CMP 2014 : (point d') interface I^* bien défini.
Longue portée, (très) basse température : I^* "reste au milieu".

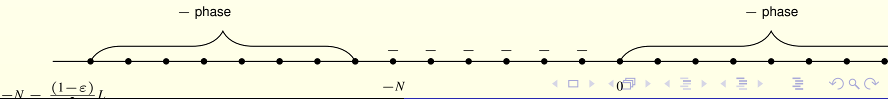
LD estimate **(BEELN 2017) : pour $\alpha_+ < \alpha < 2,\ \beta > \beta(\alpha),\ \epsilon = \epsilon(\beta)$,**

$$\exists L = L(\epsilon),\ L > L(\epsilon) : \mu_{\Lambda_L}^{-+}\left[|I^*| > \varepsilon L\right] \leq 3(1-\varepsilon)Le^{-CL^{2-\alpha}(1+o(L))}$$

Répulsion entropique **: pour $L > L_0$, $N > L$, $LN^{1-\alpha} = \circ(1)$**

Pour $m = m(\beta) > 0$ et $i \in \left[-N - \frac{(1-\varepsilon)}{2}L, -N-1\right] \cup \left[0, \frac{(1-\varepsilon)}{2}L\right]$

$$\mu^+\left[\omega_i | -_{-N,-1}\right] \leq -\frac{m}{2}$$



Discontinuité essentielle en $\omega = \omega_{\text{alt}}$ pour g^+

$$\forall \omega^\pm \in \mathcal{N}^\pm(\omega_{\text{alt}}), \ \left| \mu_{\mathbb{Z}_+}^{+,\omega^+}[\sigma_0] - \mu_{\mathbb{Z}_+}^{+,\omega^-}[\sigma_0] \right| > \delta.$$

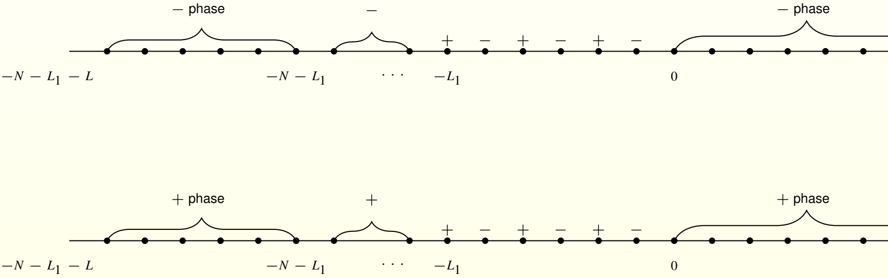


Figure 4 : From wetting to essential discontinuity

Programme de l'exposé

1. Cadre DLR en mécanique statistique mathématique
2. Modèles d'Ising (proche-voisins) en dimensions 2 et 3
3. Modèle d'Ising à longue portée sur $\mathbb{Z}$
4. Absence de g-mesure pour μ_β^+ à basse température
5. Perspectives

Perspectives

F. Paccaut (LAMFA) :

g-mesures "non-régulières" ou "non"-g mesures

Références

Courte bibliographie – Chronologie

[Dob68] R. Dobrushin. TPA **13**, 1968.
The Description of a Random Field by Means of Conditional Probabilities and Conditions of its Regularity.

[LR69] O. Lanford, D. Ruelle. CMP **13**, 1969.
Observables at Infinity and States with Short Range Correlations in Statistical Mechanics.

[Dob72] R. Dobrushin. TPA **17**, 1972.
Gibbs state describing the coexistence of phases in the $3d$ Ising model.

[G80] S. Goldstein. *Remarks on the Global Markov Property.* CMP **74**, 1980.

[F80] H. Föllmer. *On the Global Markov Property.* Springer NY, 1980.

[AHKO81] : S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn, G. Olsen. JMA **11**,1981.
The Global Markov Property for Lattice Systems.

[FP97] : R. Fernández, C.-E. Pfister. AP **25**, 1997.
Global Specification and non-Quasilocality of Projections of Gibbs Measures.

[CFMP05] : M. Cassandro, P. Ferrari, I. Merola, E. Pressuti. JMP **46**, 2005.
Geometry of Contours and Peierls Estimate in $d = 1$ Ising Models with Long-Range Interactions.

[CMPR14] : M. Cassandro, I. Merola, P. Picco, U. Rozikov. CMP **327**, 2014.
One-Dimensional Ising Models with Long Range Interactions : Cluster Expansions, Phase-Separating point.

[LP16] : J. Littin, P. Picco. Preprint 2016.
Quasi-Additive Estimates on the Hamiltonian for the One-Dimensional Long-Range Ising Model.

[CMP17] M. Cassandro, I. Merola, P. Picco. JSP **167**, 2017.
Phase Separation for the Long-Range One-Dimensional Ising Model.

[BEELN17] : R. Bissacot, E. Endo, A. van Enter, A. Le Ny. ArXiv 2017.
Entropic Repulsion and Lack of the g-measure Property for Dyson Models.

[BFV17] : S. Berghout, R. Fernández, E. Verbitskiy. Preprint 2017.
On the Relation Between Gibbs and g-measures.