Le modèle de Potts avec une ligne de défaut

Yvan Velenik

collaboration avec Sébastien Ott

Université de Genève

Le modèle de Potts, propriétés de base

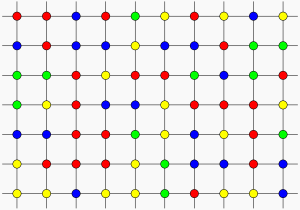
Le modèle de Potts à q états sur $\mathbb{Z}^d$: définition

- Configurations :

$$\Omega = \{\sigma = (\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} \ : \ \sigma_i \in \{1, \ldots, q\}\}$$

- Énergie de $\sigma \in \Omega$ dans la boîte $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$:

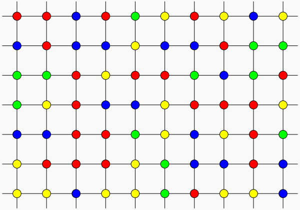
$$\mathcal{H}_\Lambda(\sigma) = \sum_{\{i,j\} \cap \Lambda \neq \emptyset} \mathbb{1}_{\{\sigma_i \neq \sigma_j\}}$$



Le modèle de Potts à q états sur $\mathbb{Z}^d$: définition

- Configurations :

$$\Omega = \{\sigma = (\sigma_i)_{i\in\mathbb{Z}^d} \,:\, \sigma_i \in \{1,\dots,q\}\}$$



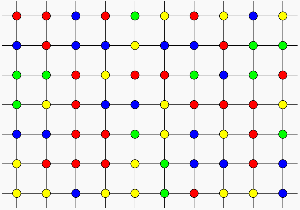
- Énergie de $\sigma \in \Omega$ dans la boîte $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$:

$$\mathcal{H}_\Lambda(\sigma) = \sum_{\{i,j\}\cap\Lambda\neq\emptyset} \mathbb{1}_{\{\sigma_i\neq\sigma_j\}}$$

- Mesure de Gibbs dans $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ avec condition au bord $\eta \in \Omega$:

$$\mu^\eta_{\Lambda;\beta}(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\mathcal{Z}^\eta_{\Lambda;\beta}} e^{-\beta\mathcal{H}_\Lambda(\sigma)} & \text{if } \sigma_i = \eta_i \ \forall i \notin \Lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le modèle de Potts à q états sur $\mathbb{Z}^d$: définition



- Configurations :

$$\Omega = \{\sigma = (\sigma_i)_{i\in\mathbb{Z}^d} \ : \ \sigma_i \in \{1,\dots,q\}\}$$

- Énergie de $\sigma \in \Omega$ dans la boîte $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$:

$$\mathcal{H}_\Lambda(\sigma) = \sum_{\{i,j\}\cap\Lambda\neq\emptyset} \mathbb{1}_{\{\sigma_i\neq\sigma_j\}}$$

- Mesure de Gibbs dans $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ avec condition au bord $\eta \in \Omega$:

$$\mu^\eta_{\Lambda;\beta}(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\mathcal{Z}^\eta_{\Lambda;\beta}} e^{-\beta\mathcal{H}_\Lambda(\sigma)} & \text{if } \sigma_i = \eta_i \ \forall i \notin \Lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

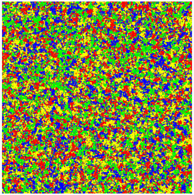
- Mesure de Gibbs en volume infini : toute mesure de probabilité μ sur Ω satisfaisant :

$$\mu(\,\cdot\,|\,\sigma_i = \eta_i \ \forall i \notin \Lambda) = \mu^\eta_{\Lambda;\beta}(\,\cdot\,)$$

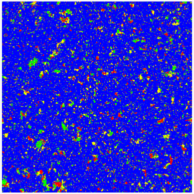
pour tout $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ et μ-p.t. $\eta \in \Omega$.

Pour tout $d \geq 2$, il existe $\beta_c = \beta_c(d) \in (0, \infty)$ tel que

- pour tout $\beta < \beta_c$, il y a une unique mesure de Gibbs en volume infini



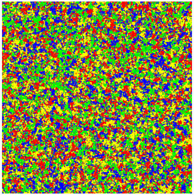
- pour tout $\beta > \beta_c$, il existe plusieurs mesures de Gibbs en volume infini $\mu_\beta^1, \ldots, \mu_\beta^q$ exhibant un ordre à longue distance : $\inf_{i \in \mathbb{Z}^d} \mu_\beta^k(\sigma_0 = \sigma_i) > \frac{1}{q}$



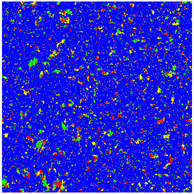
Le modèle de Potts à q états sur $\mathbb{Z}^d$: transition de phase

Pour tout $d \geq 2$, il existe $\beta_c = \beta_c(d) \in (0, \infty)$ tel que

- pour tout $\beta < \beta_c$, il y a une unique mesure de Gibbs en volume infini



- pour tout $\beta > \beta_c$, il existe plusieurs mesures de Gibbs en volume infini $\mu_\beta^1, \ldots, \mu_\beta^q$ exhibant un ordre à longue distance : $\inf_{i \in \mathbb{Z}^d} \mu_\beta^k(\sigma_0 = \sigma_i) > \frac{1}{q}$



Dorénavant, on fixe $\boxed{\beta < \beta_c}$ et on note μ l'unique mesure de Gibbs en volume infini

Décroissance exponentielle des corrélations

$$\left|\mu(\sigma_0 = \sigma_{n\mathbf{e}_1}) - \frac{1}{q}\right|$$

Décroissance exponentielle des corrélations

$$\xi = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left| \mu(\sigma_0 = \sigma_{n\mathbf{e}_1}) - \frac{1}{q} \right| > 0$$

[Duminil-Copin, Raoufi, Tassion ’17]

ξ est appelée longueur de corrélation inverse (dans la direction $\mathbf{e}_1$)

Le modèle de Potts à q états sur $\mathbb{Z}^d$: décroissance des corrélations

Décroissance exponentielle des corrélations

$$\xi = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left| \mu(\sigma_0 = \sigma_{n\mathbf{e}_1}) - \frac{1}{q} \right| > 0$$

[Duminil-Copin, Raoufi, Tassion '17]

ξ est appelée longueur de corrélation inverse (dans la direction $\mathbf{e}_1$)

Asymptotique d'Ornstein–Zernike

Il existe $C = C(\beta)$ telle que, lorsque $n \to \infty$,

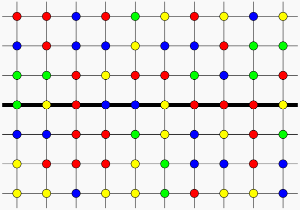
$$\mu(\sigma_0 = \sigma_{n\mathbf{e}_1}) = \frac{1}{q} + \frac{C}{n^{(d-1)/2}} e^{-\xi n} (1 + o(1))$$

[Campanino, Ioffe, V. '08]

Effet de la ligne de défaut sur la longueur de corrélation

- La ligne : $\mathcal{L} = \{k\mathbf{e}_1 \in \mathbb{Z}^d \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$
- Constantes de couplage :

$$J_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \sim j, \{i,j\} \not\subset \mathcal{L} \\ J & \text{if } i \sim j, \{i,j\} \subset \mathcal{L} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

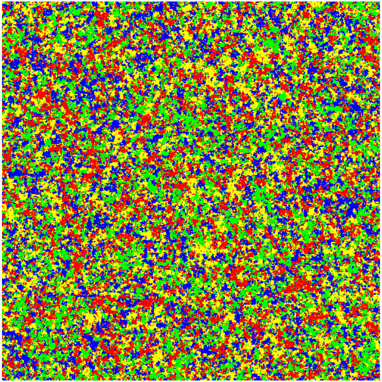


- Énergie de $\sigma \in \Omega$ dans la boîte $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$:

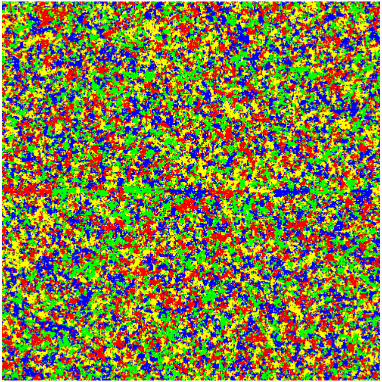
$$\mathcal{H}_{\Lambda;J}(\sigma) = \sum_{\{i,j\} \cap \Lambda \neq \emptyset} J_{ij} \, \mathbb{1}_{\{\sigma_i \neq \sigma_j\}}$$

- Mesure de Gibbs : comme avant.

Le modèle de Potts avec une ligne de défaut : illustration



$J = 1$



$J = 3$

Le modèle de Potts avec une ligne de défaut : question centrale

Fixons $\beta < \beta_c$; soit $J \geq 0$ et notons μ_J l'unique mesure de Gibbs en volume infini.

longueur de corrélation inverse longitudinale :

$$\xi(J) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left|\mu_J(\sigma_0 = \sigma_{n\mathbf{e}_1}) - \frac{1}{q}\right|$$

Le modèle de Potts avec une ligne de défaut : question centrale

Fixons $\beta < \beta_c$; soit $J \geq 0$ et notons μ_J l'unique mesure de Gibbs en volume infini.

longueur de corrélation inverse longitudinale :

$$\xi(J) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left| \mu_J(\sigma_0 = \sigma_{n\mathbf{e}_1}) - \frac{1}{q} \right|$$

Question centrale

Comment $\xi(J)$ varie-t-elle lorsque J croît de 0 à $+\infty$?

Le modèle de Potts avec une ligne de défaut : question centrale

Fixons $\beta < \beta_c$; soit $J \geq 0$ et notons μ_J l'unique mesure de Gibbs en volume infini.

longueur de corrélation inverse longitudinale :

$$\xi(J) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left|\mu_J(\sigma_0 = \sigma_{n\mathbf{e}_1}) - \frac{1}{q}\right|$$

Question centrale

Comment $\xi(J)$ varie-t-elle lorsque J croît de 0 à $+\infty$?

Cette question a été abordée pour la première fois dans le cas du modèle d'Ising sur $\mathbb{Z}^2$ dans [McCoy, Perk '80], sur la base de **calculs explicites**. De nombreux travaux ont suivi (même modèle, variantes diverses, calculs explicites).

Nous reconsidérons ce problème pour des **modèles de Potts généraux**, en **toute dimension** $d \geq 2$. $\rightsquigarrow$ Calculs explicites impossibles !

Le modèle de Potts avec une ligne de défaut : résultats principaux

Propriétés de base

Theorem (Ott, V. ’17)

- $J \mapsto \xi(J)$ *est strictement positive, Lipschitz-continue et décroissante*
- $\xi(J) = \xi(1) \equiv \xi$ *pour tout* $J \leq 1$
- $\xi(J) \sim e^{-\beta J}$ *lorsque* $J \to \infty$

Le modèle de Potts avec une ligne de défaut : résultats principaux

Propriétés de base

Theorem (Ott, V. ’17)

- $J \mapsto \xi(J)$ *est strictement positive, Lipschitz-continue et décroissante*
- $\xi(J) = \xi(1) \equiv \xi$ *pour tout* $J \leq 1$
- $\xi(J) \sim e^{-\beta J}$ *lorsque* $J \to \infty$

Le modèle de Potts avec une ligne de défaut : résultats principaux

Propriétés de base

Theorem (Ott, V. ’17)

- $J \mapsto \xi(J)$ *est strictement positive, Lipschitz-continue et décroissante*
- $\xi(J) = \xi(1) \equiv \xi$ *pour tout* $J \leq 1$
- $\xi(J) \sim e^{-\beta J}$ *lorsque* $J \to \infty$

Propriétés de base

Theorem (Ott, V. ’17)

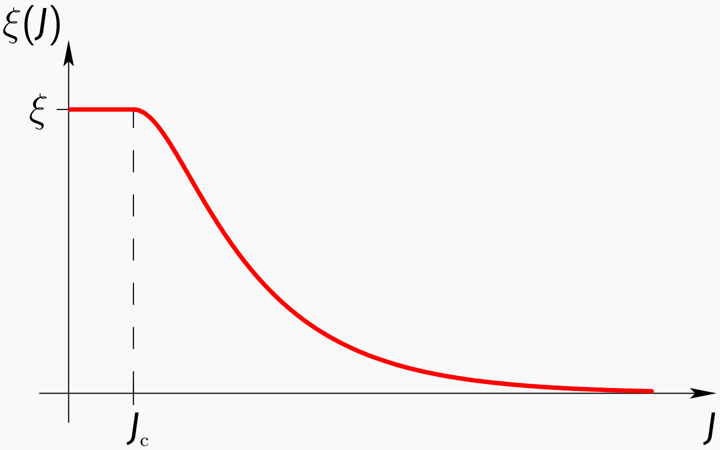
- $J \mapsto \xi(J)$ *est strictement positive, Lipschitz-continue et décroissante*
- $\xi(J) = \xi(1) \equiv \xi$ *pour tout* $J \leq 1$
- $\xi(J) \sim e^{-\beta J}$ *lorsque* $J \to \infty$

En particulier, il existe $J_c \in [1, \infty)$ tel que

$\xi(J) = \xi$ for all $J \leq J_c$ et $\xi(J) < \xi$ for all $J > J_c$

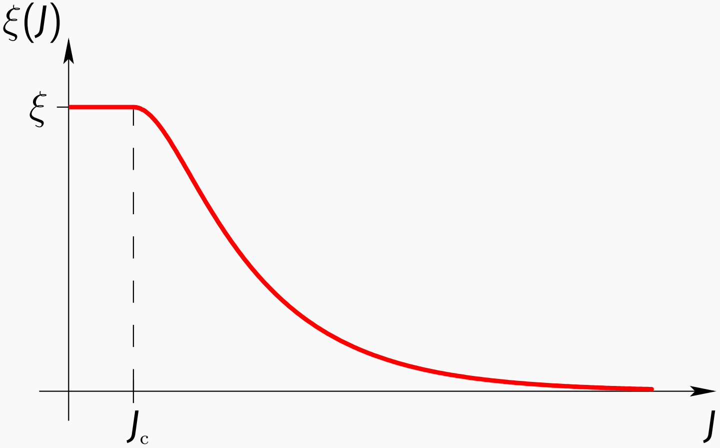
Le modèle de Potts avec une ligne de défaut : résultats principaux

Graphe typique



Le modèle de Potts avec une ligne de défaut : résultats principaux

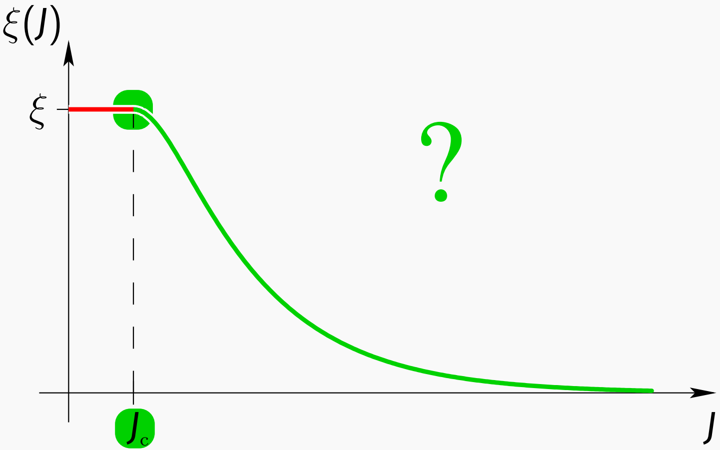
Graphe typique



En fait : correspond au résultat du calcul explicite pour le modèle d'Ising sur $\mathbb{Z}^2$ dans [McCoy, Perk '80]

Le modèle de Potts avec une ligne de défaut : résultats principaux

Graphe typique



En fait : correspond au résultat du calcul explicite pour le modèle d'Ising sur $\mathbb{Z}^2$ dans [McCoy, Perk '80]

Le modèle de Potts avec une ligne de défaut : résultats principaux

Theorem (Ott, V. '17)

1. $J_c = 1$ *lorsque* $d = 2$ ou 3, *mais* $J_c > 1$ *lorsque* $d \geq 4$
2. $J \mapsto \xi(J)$ *est* ***strictement décroissante*** *et* ***réelle-analytique*** *lorsque* $J > J_c$
3. *Il existe des constantes* $c_2^{\pm}, c_3^{\pm} > 0$ *telles que, lorsque* $J \downarrow J_c$,

$$c_2^-(J - J_c)^2 \leq \xi(J_c) - \xi(J) \leq c_2^+(J - J_c)^2 \qquad (d = 2)$$

$$e^{-c_3^-/(J-J_c)} \leq \xi(J_c) - \xi(J) \leq e^{-c_3^+/(J-J_c)} \qquad (d = 3)$$

4. *Pour tout* $J > J_c$, *il existe* $C = C(J, \beta)$ *telle que*

$$\mu(\sigma_0 = \sigma_{n\mathbf{e}_1}) = \frac{1}{q} + C\, e^{-\xi(J)n}\, (1 + o(1))$$

Le modèle de Potts avec une ligne de défaut : résultats principaux

Theorem (Ott, V. '17)

1. $J_c = 1$ *lorsque* $d = 2$ *ou* 3, *mais* $J_c > 1$ *lorsque* $d \geq 4$
2. $J \mapsto \xi(J)$ *est strictement décroissante et réelle-analytique lorsque* $J > J_c$
3. *Il existe des constantes* $c_2^{\pm}, c_3^{\pm} > 0$ *telles que, lorsque* $J \downarrow J_c$,

$$c_2^-(J - J_c)^2 \leq \xi(J_c) - \xi(J) \leq c_2^+(J - J_c)^2 \qquad (d = 2)$$

$$e^{-c_3^-/(J-J_c)} \leq \xi(J_c) - \xi(J) \leq e^{-c_3^+/(J-J_c)} \qquad (d = 3)$$

4. *Pour tout* $J > J_c$, *il existe* $C = C(J, \beta)$ *telle que*

$$\mu(\sigma_0 = \sigma_{n\mathbf{e}_1}) = \frac{1}{q} + C\, e^{-\xi(J)n}\,(1 + o(1))$$

Le modèle de Potts avec une ligne de défaut : résultats principaux

Theorem (Ott, V. '17)

1. $J_c = 1$ *lorsque* $d = 2$ *ou* 3, *mais* $J_c > 1$ *lorsque* $d \geq 4$
2. $J \mapsto \xi(J)$ *est* ***strictement décroissante*** *et* ***réelle-analytique*** *lorsque* $J > J_c$
3. *Il existe des constantes* $c_2^{\pm}, c_3^{\pm} > 0$ *telles que, lorsque* $J \downarrow J_c$,

$$c_2^-(J - J_c)^2 \leq \xi(J_c) - \xi(J) \leq c_2^+(J - J_c)^2 \qquad (d = 2)$$

$$e^{-c_3^-/(J-J_c)} \leq \xi(J_c) - \xi(J) \leq e^{-c_3^+/(J-J_c)} \qquad (d = 3)$$

4. *Pour tout* $J > J_c$, *il existe* $C = C(J, \beta)$ *telle que*

$$\mu(\sigma_0 = \sigma_{n\mathbf{e}_1}) = \frac{1}{q} + C\, e^{-\xi(J)n}\,(1 + o(1))$$

Le modèle de Potts avec une ligne de défaut : résultats principaux

Theorem (Ott, V. '17)

1. $J_c = 1$ *lorsque* $d = 2$ *ou* 3, *mais* $J_c > 1$ *lorsque* $d \geq 4$
2. $J \mapsto \xi(J)$ *est* **strictement décroissante** *et* **réelle-analytique** *lorsque* $J > J_c$
3. *Il existe des constantes* $c_2^{\pm}, c_3^{\pm} > 0$ *telles que, lorsque* $J \downarrow J_c$,

$$c_2^-(J - J_c)^2 \leq \xi(J_c) - \xi(J) \leq c_2^+(J - J_c)^2 \qquad (d = 2)$$

$$e^{-c_3^-/(J-J_c)} \leq \xi(J_c) - \xi(J) \leq e^{-c_3^+/(J-J_c)} \qquad (d = 3)$$

4. *Pour tout* $J > J_c$, *il existe* $C = C(J, \beta)$ *telle que*

$$\mu(\sigma_0 = \sigma_{n\mathbf{e}_1}) = \frac{1}{q} + C\, e^{-\xi(J)n}\,(1 + o(1))$$

Reformulation en termes de FK-percolation

Reformulation en termes de FK-percolation

La preuve repose sur une reformulation en termes de **FK-percolation**.

- Soient $p, p' \in (0,1)$, $q \in [1,\infty)$. Soient $x = p/(1-p)$ et $x' = p'/(1-p')$.

Reformulation en termes de FK-percolation

La preuve repose sur une reformulation en termes de **FK-percolation**.

- Soient $p, p' \in (0,1)$, $q \in [1,\infty)$. Soient $x = p/(1-p)$ et $x' = p'/(1-p')$.
- Soit ω une collection d'arêtes p.p.v. dans $\{-M,\dots,M\}^d$.

Reformulation en termes de FK-percolation

La preuve repose sur une reformulation en termes de **FK-percolation**.

- Soient $p, p' \in (0,1)$, $q \in [1,\infty)$. Soient $x = p/(1-p)$ et $x' = p'/(1-p')$.
- Soit ω une collection d'arêtes p.p.v. dans $\{-M,\dots,M\}^d$.
- On note $$|\omega| = \#\text{ d'arêtes dans } \omega$$ $$\mathrm{O}_{\mathcal{L}}(\omega) = \#\text{ de ces arêtes incluses dans } \mathcal{L}.$$

Reformulation en termes de FK-percolation

La preuve repose sur une reformulation en termes de **FK-percolation**.

- Soient $p, p' \in (0,1)$, $q \in [1,\infty)$. Soient $x = p/(1-p)$ et $x' = p'/(1-p')$.
- Soit ω une collection d'arêtes p.p.v. dans $\{-M,\dots,M\}^d$.
- On note $|\omega| = \#$ d'arêtes dans ω
  $\mathrm{O}_{\mathcal{L}}(\omega) = \#$ de ces arêtes incluses dans $\mathcal{L}$.
- On associe à ω la probabilité

$$\nu^M_{x,x',q}(\omega) \propto x^{|\omega|} \left(\frac{x'}{x}\right)^{\mathrm{O}_{\mathcal{L}}(\omega)} q^{\mathcal{N}(\omega)}$$

où $\mathcal{N}(\omega)$ est le nombre de composantes connexes (y compris chaque sommet isolé).

Reformulation en termes de FK-percolation

La preuve repose sur une reformulation en termes de **FK-percolation**.

- Soient $p, p' \in (0,1)$, $q \in [1,\infty)$. Soient $x = p/(1-p)$ et $x' = p'/(1-p')$.
- Soit ω une collection d'arêtes p.p.v. dans $\{-M,\ldots,M\}^d$.
- On note $|\omega| = \#$ d'arêtes dans ω
  $\mathrm{O}_{\mathcal{L}}(\omega) = \#$ de ces arêtes incluses dans $\mathcal{L}$.
- On associe à ω la probabilité

$$\nu^M_{x,x',q}(\omega) \propto x^{|\omega|} \left(\frac{x'}{x}\right)^{\mathrm{O}_{\mathcal{L}}(\omega)} q^{\mathcal{N}(\omega)}$$

où $\mathcal{N}(\omega)$ est le nombre de composantes connexes (y compris chaque sommet isolé).

- La limite faible lorsque $M \to \infty$ existe et est notée $\nu_{x'}$ (p et q étant fixés).

Soient $p = 1 - e^{-\beta}$ et $p' = 1 - e^{-\beta J}$.

La relation standard entre la FK-percolation le modèle de Potts à q états implique que

$$\mu_J(\sigma_0 = \sigma_{n\mathbf{e}_1}) = \frac{1}{q} + \frac{q-1}{q}\,\nu_{x'}(0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1)$$

et donc, en écrivant $\xi(x') \equiv \xi(J(x'))$,

$$\boxed{\xi(x') = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \nu_{x'}(0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1)}$$

Reformulation en termes de FK-percolation

Soient $p = 1 - e^{-\beta}$ et $p' = 1 - e^{-\beta J}$.

La relation standard entre la FK-percolation le modèle de Potts à q états implique que

$$\mu_J(\sigma_0 = \sigma_{n\mathbf{e}_1}) = \frac{1}{q} + \frac{q-1}{q}\,\nu_{x'}(0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1)$$

et donc, en écrivant $\xi(x') \equiv \xi(J(x'))$,

$$\boxed{\xi(x') = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \nu_{x'}(0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1)}$$

L'analyse de $\xi(x')$ dans le cas $q = 1$ a été effectuée dans [Friedli, Ioffe, V. '13].

L'extension à tout $q \geq 1$ est rendue difficile par la perte de l'indépendance et de plusieurs conséquences utiles, telle que l'inégalité BK, qui doivent être remplacées par des constructions appropriées exploitant les propriétés de **mélange exponentiel** de ν.

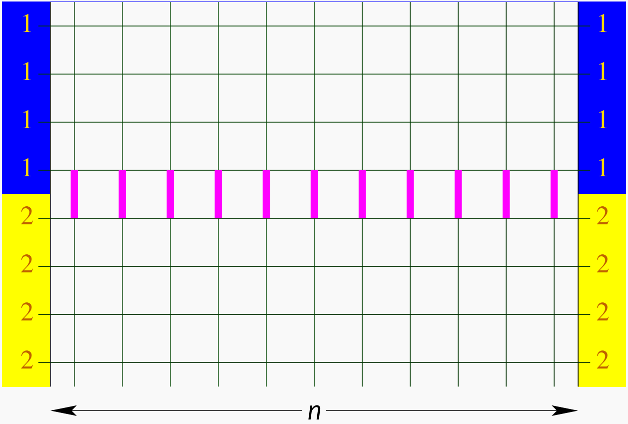
Accrochage d'interface dans le modèle de Potts sur $\mathbb{Z}^2$

Accrochage dans le modèle de Potts sur $\mathbb{Z}^2$: dualité

Sur $\mathbb{Z}^2$, l'**auto-dualité** de la FK-percolation permet de reformuler certains des résultats présentés précédemment en termes des propriétés de l'**interface** d'un modèle de Potts sur $\mathbb{Z}^2$ **sous la température critique**.

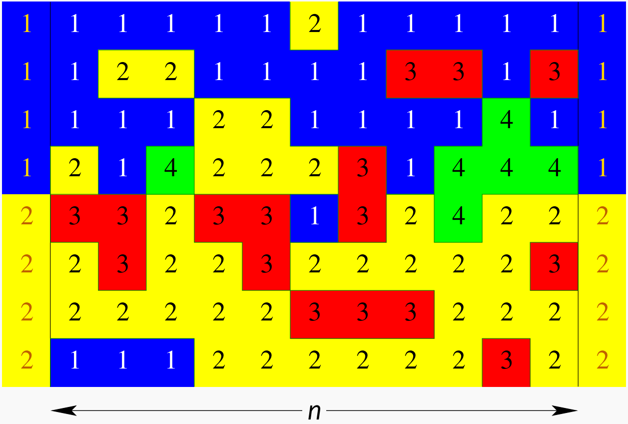
$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\text{Potts model}\\ \beta < \beta_c\end{array}} \arrow[r] & \boxed{\begin{array}{c}\text{FK percolation}\\ p < p_c\end{array}} \arrow[d, "\text{dualité}"] \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{Potts model}\\ \beta > \beta_c\end{array}} & \boxed{\begin{array}{c}\text{FK percolation}\\ p > p_c\end{array}} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Modèle de Potts sur $\mathbb{Z}^2$ avec condition au bord de Dobrushin

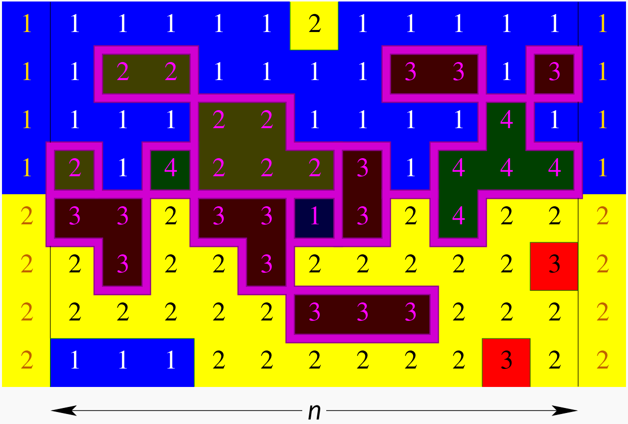


Seuls les spins p.p.v. interagissent et les constantes de couplage sont toutes égales à 1, sauf celles représentées en violet, dont la valeur est $J \geq 0$. On suppose que $\beta > \beta_c$.

Modèle de Potts sur $\mathbb{Z}^2$ avec condition au bord de Dobrushin



Modèle de Potts sur $\mathbb{Z}^2$ avec condition au bord de Dobrushin

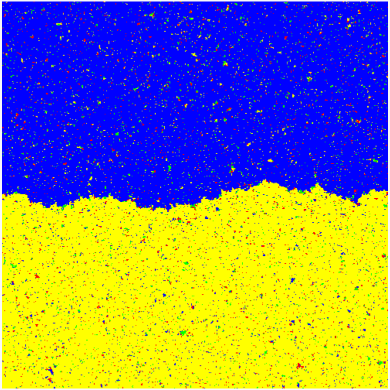


L'interface correspond à l'ensemble connexe des arêtes « frustrées » induites par la condition au bord. Converge faiblement vers un pont brownien sous scaling diffusif lorsque $J = 1$ [Campanino, Ioffe, V. '08].

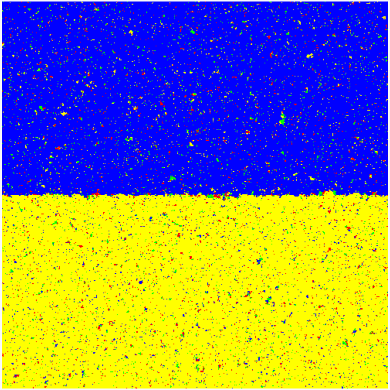
Accrochage dans le modèle de Potts sur $\mathbb{Z}^2$: localisation

Theorem (Ott, V. '17)

L'interface est localisée (converge vers un segment de droite sous scaling diffusif) pour tout $J < 1$.



$J = 1$



$J = \frac{1}{2}$

Accrochage dans le modèle de Potts sur $\mathbb{Z}^2$: remarques historiques

En 1980–1981, Douglas Abraham a publié deux articles

PHYSICAL REVIEW LETTERS

VOLUME 44 | 5 MAY 1980 | NUMBER 18

Solvable Model with a Roughening Transition for a Planar Ising Ferromagnet

D. B. Abraham[a]

J. Phys. A: Math. Gen. **14** (1981) L369–L372. Printed in Great Britain

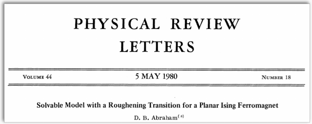
LETTER TO THE EDITOR

Binding of a domain wall in the planar Ising ferromagnet

D B Abraham

Accrochage dans le modèle de Potts sur $\mathbb{Z}^2$: remarques historiques

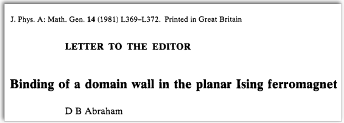
En 1980–1981, Douglas Abraham a publié deux articles


PHYSICAL REVIEW LETTERS

VOLUME 44 | 5 MAY 1980 | NUMBER 18

Solvable Model with a Roughening Transition for a Planar Ising Ferromagnet

D. B. Abraham[(a)]

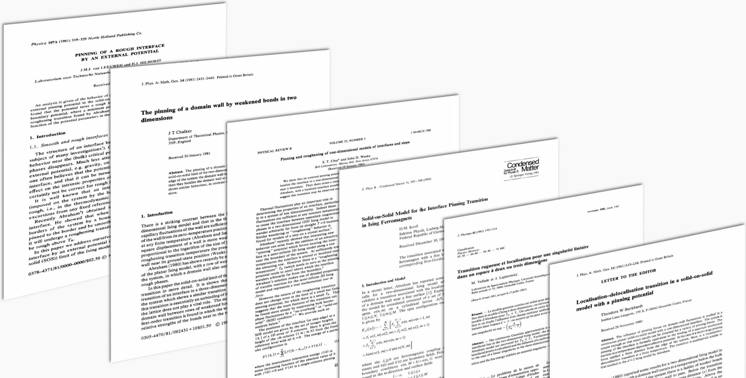

J. Phys. A: Math. Gen. **14** (1981) L369–L372. Printed in Great Britain

LETTER TO THE EDITOR

Binding of a domain wall in the planar Ising ferromagnet

D B Abraham

qui ont généré une intense activité (ci-dessous, liste partielle de 1981 !) :

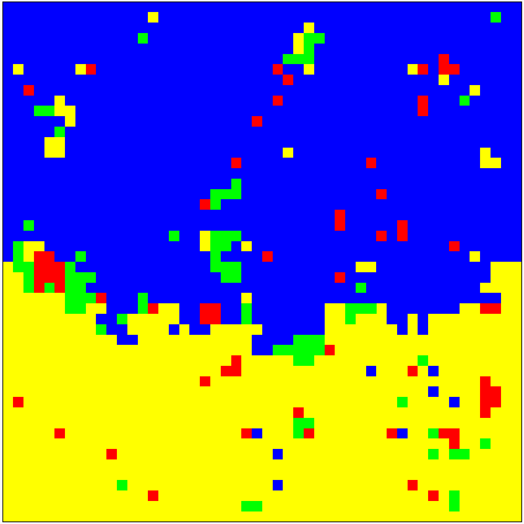


Accrochage dans le modèle de Potts sur $\mathbb{Z}^2$: remarques historiques

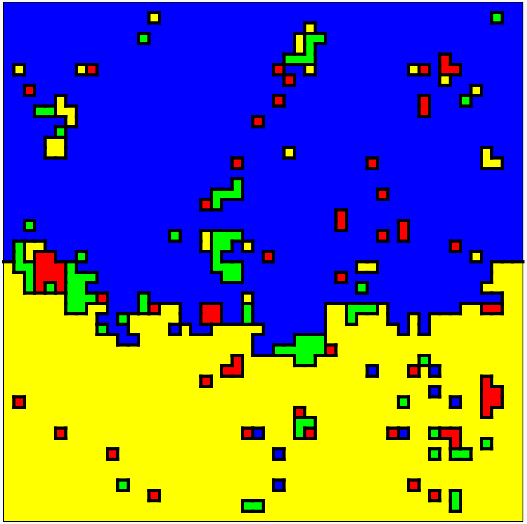
- Dans ces articles, Abraham analyse l'accrochage de l'interface (le problème de mouillage) dans le **modèle d'Ising** sur $\mathbb{Z}^2$, à l'aide de **calculs explicites**.
- Les articles qui ont suivi traitent de **versions effectives** (SOS/marche aléatoire) du même problème, avec deux buts principaux : obtenir une **meilleure compréhension** des mécanismes sous-jacents, et analyser **diverses extensions** (espace de dimension supérieure, interface de dimension supérieure, potentiel d'accrochage désordonné, etc.).
- Cette intense activité se poursuit aujourd'hui. Voir le livre de Giacomin *Random Polymer Models* pour un compte-rendu récent des développements du point de vue probabiliste.

Une de nos motivations était de montrer que les méthodes actuelles de la physique statistique rigoureuse permettent finalement de **réimporter certains des résultats établis pour les modèles effectifs vers des modèles de spins sur réseau** pour lesquels il n'est pas possible d'effectuer des calculs explicites (et d'obtenir des informations supplémentaires dans les cas où c'est possible).

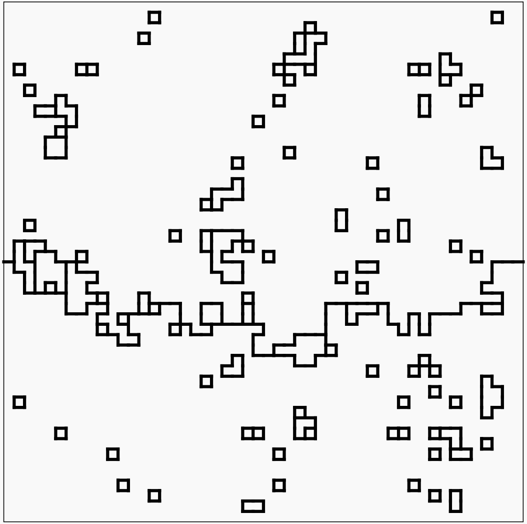
Deux approximations :



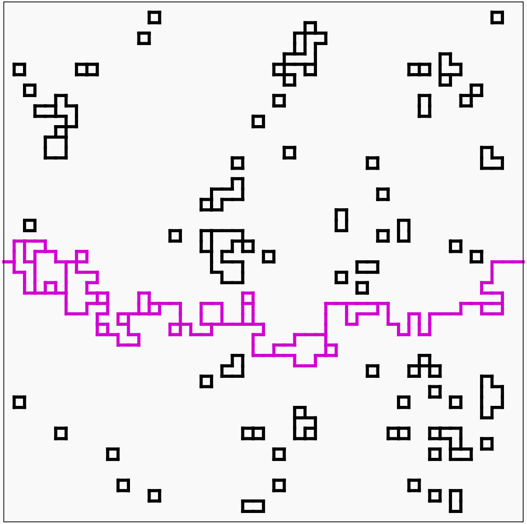
Deux approximations :



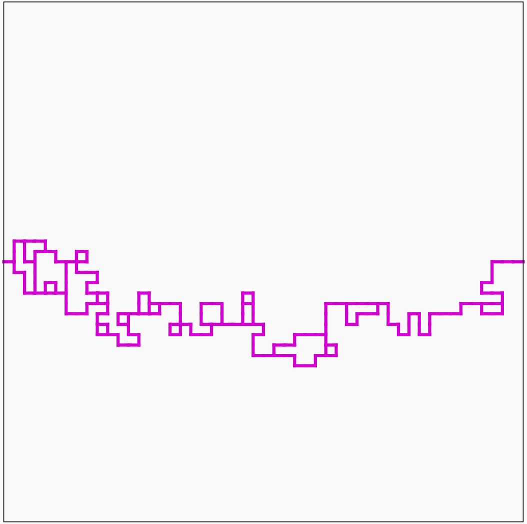
Deux approximations :



Deux approximations :

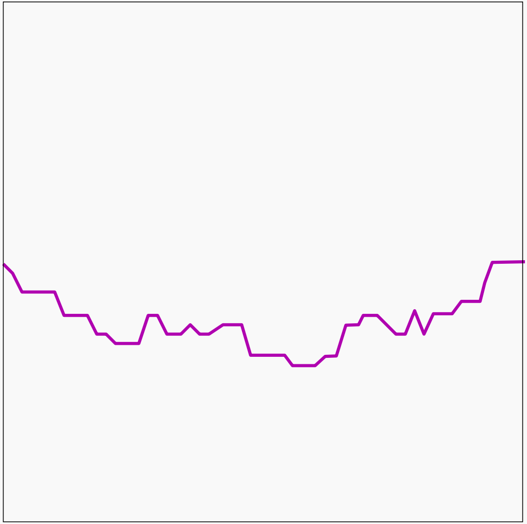


Deux approximations : ignorer les autres objets



Accrochage dans le modèle de Potts sur $\mathbb{Z}^2$: modèles effectifs d'interface

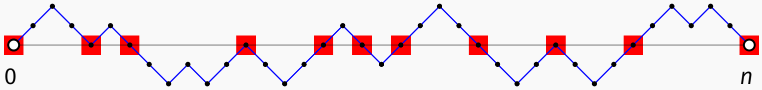
Deux approximations : ignorer les autres objets et simplifier l'interface



Ingrédients

- Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^{d-1}$.
- Soit $\mathbb{X} = (X_0 = 0, X_1 \ldots, X_n)$ la trajectoire (vue comme un chemin dans $\mathbb{Z}^d$) correspondant aux n premiers pas.
- Étant donné $\epsilon \in \mathbb{R}$, on s'intéresse alors à l'**énergie libre** :

$$f_n(\epsilon) = \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\left[e^{\epsilon|\mathbb{X}\cap\mathcal{L}|} \,|\, X_n = 0\right]$$



- L'interface est **localisée** si et seulement si $f(\epsilon) = \lim_{n\to\infty} f_n(\epsilon) > 0$.

Liens avec nos questions...

Relation au problème d'accrochage d'une MA : borne supérieure

- Soit $\lambda = \log(x'/x)$. Par définition,

$$\xi - \xi(x') = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{\nu_{x'}(0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1)}{\nu(0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{\nu\left[e^{\lambda o_{\mathcal{L}}} \;\middle|\; 0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1\right]}{\nu\left[e^{\lambda o_{\mathcal{L}}}\right]}$$

Relation au problème d'accrochage d'une MA : borne supérieure

- Soit $\lambda = \log(x'/x)$. Par définition,

$$\xi - \xi(x') = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{\nu_{x'}(0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1)}{\nu(0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{\nu\left[e^{\lambda o_{\mathcal{L}}} \;\middle|\; 0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1\right]}{\nu\left[e^{\lambda o_{\mathcal{L}}}\right]}$$

- Par FKG, on peut montrer que

$$\frac{1}{n} \log \frac{\nu\left[e^{\lambda o_{\mathcal{L}}} \;\middle|\; 0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1\right]}{\nu\left[e^{\lambda o_{\mathcal{L}}}\right]} \leq \frac{1}{n} \log \nu\left[e^{\lambda |\mathbf{C}_0 \cap \mathcal{L}|} \;\middle|\; 0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1\right]$$

Relation au problème d'accrochage d'une MA : borne supérieure

- Soit $\lambda = \log(x'/x)$. Par définition,

$$\xi - \xi(x') = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{\nu_{x'}(0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1)}{\nu(0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{\nu\left[e^{\lambda \mathsf{o}_{\mathcal{L}}} \;\middle|\; 0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1\right]}{\nu\left[e^{\lambda \mathsf{o}_{\mathcal{L}}}\right]}$$

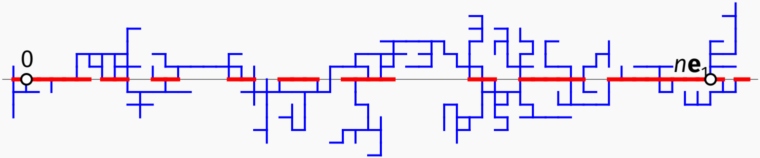
- Par FKG, on peut montrer que

$$\frac{1}{n} \log \frac{\nu\left[e^{\lambda \mathsf{o}_{\mathcal{L}}} \;\middle|\; 0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1\right]}{\nu\left[e^{\lambda \mathsf{o}_{\mathcal{L}}}\right]} \leq \frac{1}{n} \log \nu\left[e^{\lambda |\mathbf{C}_0 \cap \mathcal{L}|} \;\middle|\; 0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1\right]$$

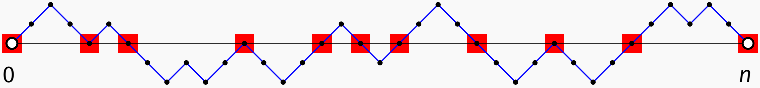
- Notez la similarité entre la borne obtenue et l'expression de l'énergie libre pour le problème d'accrochage dans les modèles effectifs :

$$f_n(\epsilon) = \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\left[e^{\epsilon |\mathbb{X} \cap \mathcal{L}|} \,|\, X_n = 0\right]$$

Relation au problème d'accrochage d'une MA : borne supérieure

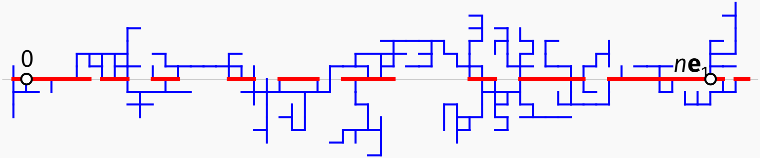


$$\frac{1}{n}\log \nu\left[e^{\lambda|\mathbf{C}_0\cap\mathcal{L}|}\;\middle|\; 0\leftrightarrow n\mathbf{e}_1\right]$$

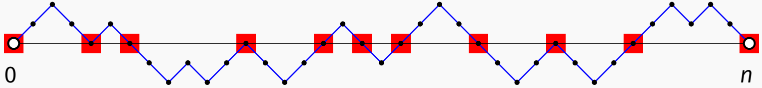


$$\frac{1}{n}\log \mathbb{E}\left[e^{\epsilon|\mathbb{X}\cap\mathcal{L}|}\,|\,X_n=0\right]$$

Relation au problème d'accrochage d'une MA : borne supérieure



$$\frac{1}{n}\log \nu\left[e^{\lambda|\mathbf{C}_0\cap\mathcal{L}|} \;\middle|\; 0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1\right]$$

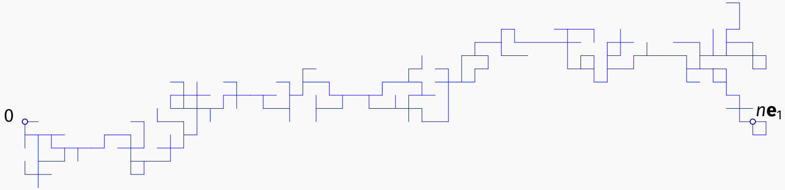


$$\frac{1}{n}\log \mathbb{E}\left[e^{\epsilon|\mathbb{X}\cap\mathcal{L}|}\,|\,X_n=0\right]$$

L'analogie peut être rendue plus précise en utilisant une **représentation en marche aléatoire effective** pour $\mathbf{C}_0$. Cette dernière permet d'utiliser certains des arguments développés pour l'accrochage d'une marche aléatoire.

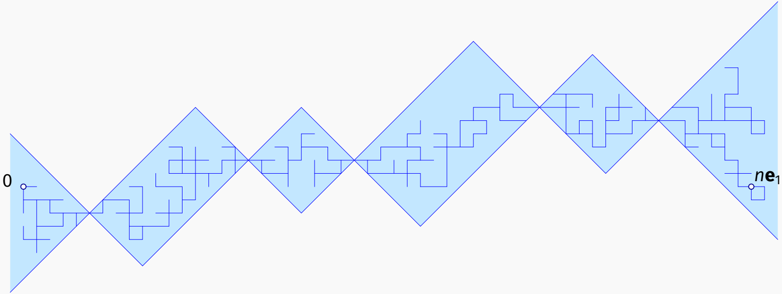
Relation au problème d'accrochage d'une MA : marche effective

Soit $p < p_c$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, avec une $\nu(\cdot \mid 0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1)$-probabilité exponentiellement proche de 1, $\mathbf{C}_0$ admet la décomposition suivante :



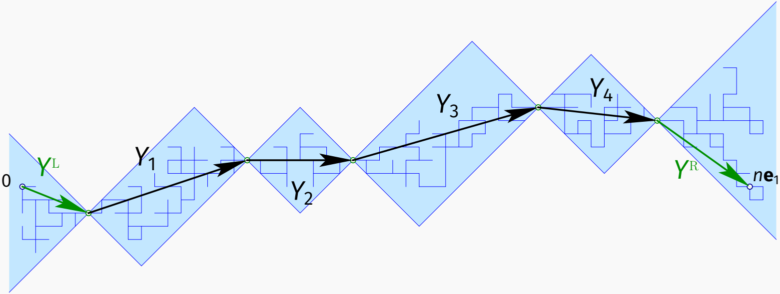
Relation au problème d'accrochage d'une MA : marche effective

Soit $p < p_c$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, avec une $\nu(\cdot \mid 0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1)$-probabilité exponentiellement proche de 1, $\mathbf{C}_0$ admet la décomposition suivante :



Relation au problème d'accrochage d'une MA : marche effective

Soit $p < p_c$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, avec une $\nu(\cdot \mid 0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1)$-probabilité exponentiellement proche de 1, $\mathbf{C}_0$ admet la décomposition suivante :

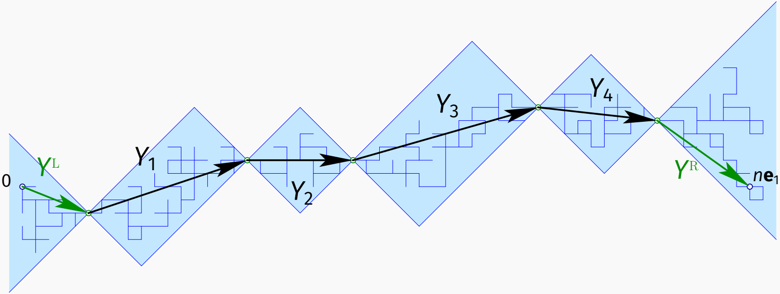


$$\{0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1\} = \{Y^{\mathrm{L}} + Y_1 + \cdots + Y_N + Y^{\mathrm{R}} = n\mathbf{e}_1\},$$

où $(Y_k)_{k\geq 1}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ de loi P, et Y^{L}, Y^{R} sont des vecteurs aléatoires indépendants avec queues exponentielles.

Relation au problème d’accrochage d’une MA : marche effective

Soit $p < p_c$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, avec une $\nu(\cdot \mid 0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1)$-probabilité exponentiellement proche de 1, $\mathbf{C}_0$ admet la décomposition suivante :



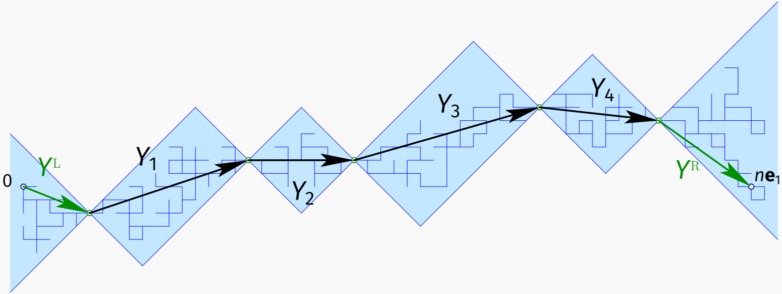
$$\{0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1\} = \{Y^{\mathrm{L}} + Y_1 + \cdots + Y_N + Y^{\mathrm{R}} = n\mathbf{e}_1\},$$

où $(Y_k)_{k \geq 1}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ de loi P, et Y^{L}, Y^{R} sont des vecteurs aléatoires indépendants avec queues exponentielles.

Ce résultat repose sur la représentation en « marche aléatoire » de [Campanino, Ioffe, V. ’08] ; l’indépendance des incréments est obtenue en agrégeant aléatoirement ceux de ce processus de façon appropriée.

Relation au problème d'accrochage d'une MA : marche effective

Soit $p < p_c$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, avec une $\nu(\cdot \mid 0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1)$-probabilité exponentiellement proche de 1, $\mathbf{C}_0$ admet la décomposition suivante :



Écrivons $Y_k = (Y_k^{\parallel}, Y_k^{\perp}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{d-1}$.

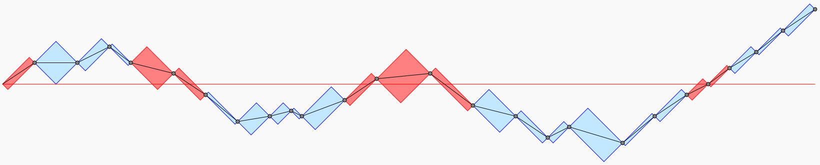
Propriétés de la marche aléatoire effective Y :

- $\mathrm{P}(Y_1^{\parallel} \geq 1) = 1$;
- $\mathrm{P}(\|Y_1\| > t) \leq e^{-\nu t}$ pour un $\nu = \nu(p) > 0$;
- pour tout $z^{\perp} \in \mathbb{Z}^{d-1}$, $\mathrm{P}\big(Y_1^{\perp} = z^{\perp}\big) = \mathrm{P}\big(Y_1^{\perp} = -z^{\perp}\big)$.

Relation au problème d'accrochage d'une MA : marche effective

Comme on l'a vu

$$\xi - \xi(x') \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \nu\left[e^{\lambda|\mathbf{C}_0 \cap \mathcal{L}|} \;\middle|\; 0 \leftrightarrow n\mathbf{e}_1\right]$$



Nous avons essentiellement **réduit le problème** (la borne sup en tout cas) à celui de l'**accrochage d'une marche aléatoire** !

Relation au problème d'accrochage d'une MA : borne inférieure

Une analogie directe avec l'accrochage d'une marche aléatoire n'est **possible que pour la borne supérieure**.

Problèmes avec la borne inférieure :

- interaction entre $\mathbf{C}_0$ et les autres amas
- interaction entre les autres amas et la ligne $\mathcal{L}$

$\rightsquigarrow$ l'interaction effective entre $\mathbf{C}_0$ et $\mathcal{L}$ n'est pas purement attractive, même lorsque $J > 1$

$\rightsquigarrow$ requiert une approche différente (changement de mesure et argument énergie/entropie)

Problèmes ouverts et extensions

Open problems, extensions

Problèmes ouverts

- Comportement de $\xi(J)$ dans le voisinage de J_c lorsque $d \geq 4$.
- Asymptotique fine de la fonction à 2-point lorsque $J \leq J_c$ (et $J \neq 1$).
- Limite d'échelle de l'interface du modèle de Potts sur $\mathbb{Z}^2$ lorsque $J > J_c = 1$.

Open problems, extensions

Problèmes ouverts

- Comportement de $\xi(J)$ dans le voisinage de J_c lorsque $d \geq 4$.
- Asymptotique fine de la fonction à 2-point lorsque $J \leq J_c$ (et $J \neq 1$).
- Limite d'échelle de l'interface du modèle de Potts sur $\mathbb{Z}^2$ lorsque $J > J_c = 1$.

Quelques extensions (travail en cours)

- Défaut situé le long du bord du système ($\rightsquigarrow$ mouillage lorsque $d = 2$).
- Défaut de dimension $d' \in (1, d)$: un ordre à longue distance le long du défaut est possible même lorsque le reste du système est désordonné.
- Constantes de couplage (ferromagnétiques) aléatoires (quenched) le long du défaut.

Merci pour votre attention !