

Percolation dynamique conservative

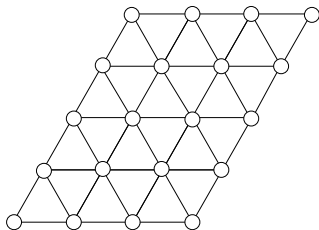
Hugo Vanneuille (ICJ, Université Lyon 1)

Journées de probabilités 2017

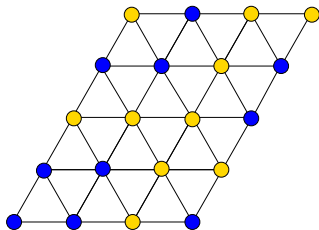
Travail en commun avec Christophe Garban

- 1 Percolation
- 2 Percolation dynamique
- 3 Percolation dynamique conservative

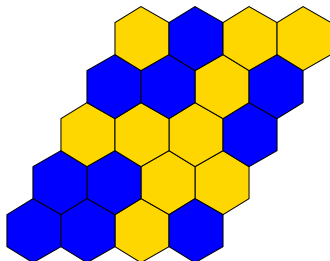
Réseau triangulaire, $p \in [0, 1]$. On colorie chaque site en bleu avec probabilité p et en jaune avec probabilité $1 - p$, indépendamment des autres sites.



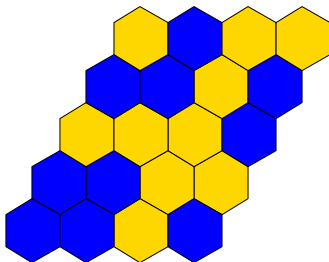
Réseau triangulaire, $p \in [0, 1]$. On colorie chaque site en bleu avec probabilité p et en jaune avec probabilité $1 - p$, indépendamment des autres sites.



Réseau triangulaire, $p \in [0, 1]$. On colorie chaque site en bleu avec probabilité p et en jaune avec probabilité $1 - p$, indépendamment des autres sites.



Réseau triangulaire, $p \in [0, 1]$. On colorie chaque site en bleu avec probabilité p et en jaune avec probabilité $1 - p$, indépendamment des autres sites.



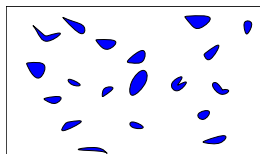
- Configuration de percolation $\omega \in \{-1, 1\}^{\text{sites de } \mathbb{T}}$.
- La loi de ω est $\mathbb{P}_p := (p\delta_1 + (1 - p)\delta_{-1})^{\otimes (\text{sites de } \mathbb{T})}$.

Kesten, 1980 : Transition de phase au point critique $p_c = 1/2$:

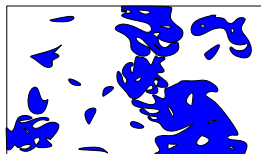
- 1 $p \leq 1/2$: \mathbb{P}_p -p.s. pas de composante infinie bleue,
- 2 $p > 1/2$: \mathbb{P}_p -p.s. une unique composante infinie bleue.

Kesten, 1980 : Transition de phase au point critique $p_c = 1/2$:

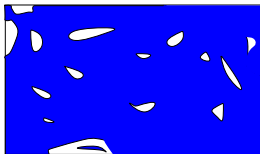
- ① $p \leq 1/2$: \mathbb{P}_p -p.s. pas de composante infinie bleue,
- ② $p > 1/2$: \mathbb{P}_p -p.s. une unique composante infinie bleue.



$p < 1/2$



$p = 1/2$



$p > 1/2$

Häggström-Peres-Steif, 1997

$$p \in [0, 1], \omega(0) \sim \mathbb{P}_p.$$

On retire la couleur de chaque site à taux 1.

Häggström-Peres-Steif, 1997

$$p \in [0, 1], \omega(0) \sim \mathbb{P}_p.$$

On retire la couleur de chaque site à taux 1.

Simulation.mp4

Häggström-Peres-Steif, 1997

$$p \in [0, 1], \omega(0) \sim \mathbb{P}_p.$$

On retire la couleur de chaque site à taux 1.

Processus de Markov $(\omega(t))_{t \geq 0}$: percolation dynamique de paramètre p .

Häggström-Peres-Steif, 1997

$$p \in [0, 1], \omega(0) \sim \mathbb{P}_p.$$

On retire la couleur de chaque site à taux 1.

Processus de Markov $(\omega(t))_{t \geq 0}$: percolation dynamique de paramètre p .

- $\omega(0) \sim \mathbb{P}_p \Rightarrow \forall t, \omega(t) \sim \mathbb{P}_p$,
- si $p \leq p_c = 1/2$, alors: $\forall t \geq 0$, p.s. il n'y a pas de composante bleue infinie dans $\omega(t)$.

Häggström-Peres-Steif, 1997

$$p \in [0, 1], \omega(0) \sim \mathbb{P}_p.$$

On retire la couleur de chaque site à taux 1.

Processus de Markov $(\omega(t))_{t \geq 0}$: percolation dynamique de paramètre p .

- $\omega(0) \sim \mathbb{P}_p \Rightarrow \forall t, \omega(t) \sim \mathbb{P}_p$,
- si $p \leq p_c = 1/2$, alors: $\forall t \geq 0$, p.s. il n'y a pas de composante bleue infinie dans $\omega(t)$.

Question : Est-ce qu'il existe des temps t (aléatoires) auxquels il existe une composante bleue infinie dans $\omega(t)$?

Definition (Temps exceptionnels)

- $p \leq p_c = 1/2$: temps auquel il existe une composante infinie bleue,
- $p > p_c = 1/2$: temps auquel il n'existe pas de composante infinie bleue.

Definition (Temps exceptionnels)

- $p \leq p_c = 1/2$: temps auquel il existe une composante infinie bleue,
 - $p > p_c = 1/2$: temps auquel il n'existe pas de composante infinie bleue.
- $\forall t \geq 0$, p.s. t n'est pas un temps exceptionnel.

Definition (Temps exceptionnels)

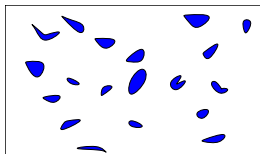
- $p \leq p_c = 1/2$: temps auquel il existe une composante infinie bleue,
 - $p > p_c = 1/2$: temps auquel il n'existe pas de composante infinie bleue.
-
- $\forall t \geq 0$, p.s. t n'est pas un temps exceptionnel.
 - Loi du 0-1 : $\mathbb{P}[\exists \text{ des temps exceptionnels}] \in \{0, 1\}$.

Definition (Temps exceptionnels)

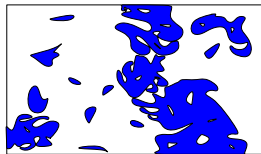
- $p \leq p_c = 1/2$: temps auquel il existe une composante infinie bleue,
 - $p > p_c = 1/2$: temps auquel il n'existe pas de composante infinie bleue.
-
- $\forall t \geq 0$, p.s. t n'est pas un temps exceptionnel.
 - Loi du 0-1 : $\mathbb{P}[\exists \text{ des temps exceptionnels}] \in \{0, 1\}$.

Proposition (Häggström-Peres-Steif, 1997)

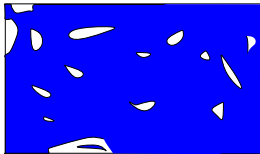
Si $p \neq p_c$, alors p.s. *il n'existe pas de temps exceptionnel.*



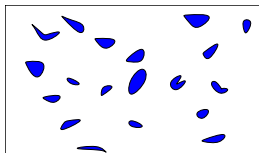
$$p < 1/2$$



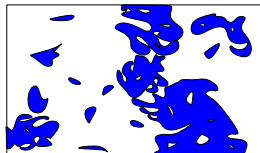
$$p = 1/2$$



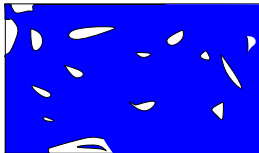
$$p > 1/2$$



$$p < 1/2$$

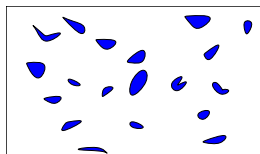


$$p = 1/2$$

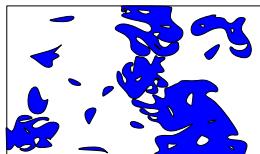


$$p > 1/2$$

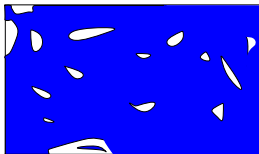
Simulation.mp4



$$p < 1/2$$



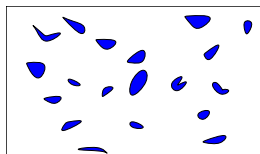
$$p = 1/2$$



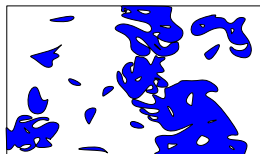
$$p > 1/2$$

Conjecture (Benjamini-Kalai-Schramm, 1999)

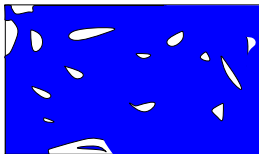
Si $p = p_c = 1/2$, alors p.s. *il existe des temps exceptionnels* avec une composante bleue infinie.



$$p < 1/2$$



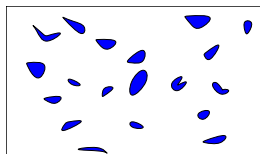
$$p = 1/2$$



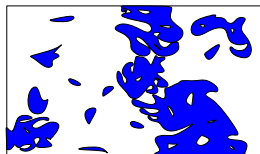
$$p > 1/2$$

Théorème (Schramm-Steif, 2005 ; Garban-Pete-Schramm, 2008)

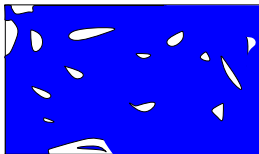
Si $p = p_c = 1/2$, alors p.s. *il existe des temps exceptionnels* avec une composante bleue infinie.



$$p < 1/2$$



$$p = 1/2$$



$$p > 1/2$$

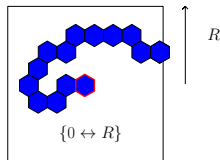
Théorème (Schramm-Steif, 2005 ; Garban-Pete-Schramm, 2008)

Si $p = p_c = 1/2$, alors p.s. il existe des temps exceptionnels avec une composante bleue infinie.

Idées venant de la vidéo : On voudrait montrer que, quand la taille de la composante bleue de l'origine est grande, elle **fluctue avec très grande vitesse**.

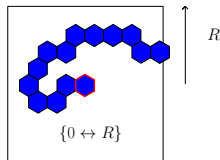
Décomposition de Fourier des fonctions Booléennes

- $\mathbb{T}_R := \{\text{sites du réseau triangulaire}\} \cap [-R, R]^2$,
- $f_R := \mathbb{1}_{\{0 \leftrightarrow R\}} : \{-1, 1\}^{\mathbb{T}_R} \rightarrow \{0, 1\}$.



Décomposition de Fourier des fonctions Booléennes

- $\mathbb{T}_R := \{\text{sites du réseau triangulaire}\} \cap [-R, R]^2$,
- $f_R := \mathbb{1}_{\{0 \leftrightarrow R\}} : \{-1, 1\}^{\mathbb{T}_R} \rightarrow \{0, 1\}$.



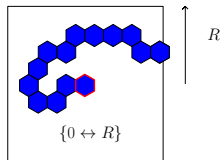
Projetons f_R sur la **base de Fourier** de $L^2(\{-1, 1\}^{\mathbb{T}_R}, \mathbb{P}_{1/2})$:

$$(\chi_S)_{S \subseteq \mathbb{T}_R} \cdot$$

$$f_R = \sum_{S \subseteq \mathbb{T}_R} \hat{f}_R(S) \chi_S,$$

Décomposition de Fourier des fonctions Booléennes

- $\mathbb{T}_R := \{\text{sites du réseau triangulaire}\} \cap [-R, R]^2$,
- $f_R := \mathbb{1}_{\{0 \leftrightarrow R\}} : \{-1, 1\}^{\mathbb{T}_R} \rightarrow \{0, 1\}$.

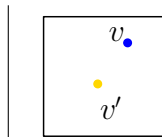


Projetons f_R sur la **base de Fourier** de $L^2(\{-1, 1\}^{\mathbb{T}_R}, \mathbb{P}_{1/2})$:

$$(\chi_S)_{S \subseteq \mathbb{T}_R}.$$

$$f_R = \sum_{S \subseteq \mathbb{T}_R} \hat{f}_R(S) \chi_S,$$

où $\chi_S(\omega) := \prod_{v \in S} \omega_v$.



$$\begin{aligned} \chi_{\{v, v'\}}(\omega) &= \omega_v \cdot \omega_{v'} \\ &= 1 \cdot (-1) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Décomposition de Fourier : $\mathbb{1}_{\{0 \leftrightarrow R\}} =: f_R = \sum_{S \subseteq \mathbb{T}_R} \widehat{f}_R(S) \chi_S$,

où $\chi_S(\omega) = \prod_{v \in S} \omega_v$.

- La base de Fourier **diagonalise** $(\omega(t))_{t \geq 0}$:

$$\mathbb{E} \left[\chi_S(\omega(0)) \chi_S(\omega(t)) \right] = e^{-t|S|}.$$

- $\mathbb{E} [f_R(\omega(0)) f_R(\omega(t))] = \sum_{S \subseteq \mathbb{T}_R} \widehat{f}_R(S)^2 e^{-t|S|}.$

Décomposition de Fourier : $\mathbb{1}_{\{0 \leftrightarrow R\}} =: f_R = \sum_{S \subseteq \mathbb{T}_R} \widehat{f}_R(S) \chi_S$,

où $\chi_S(\omega) = \prod_{v \in S} \omega_v$.

- La base de Fourier **diagonalise** $(\omega(t))_{t \geq 0}$:

$$\mathbb{E} \left[\chi_S(\omega(0)) \chi_S(\omega(t)) \right] = e^{-t|S|}.$$

- $\mathbb{E} [f_R(\omega(0)) f_R(\omega(t))] = \sum_{S \subseteq \mathbb{T}_R} \widehat{f}_R(S)^2 e^{-t|S|}$.

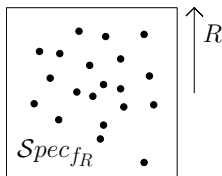
Benjamini-Kalai-Schramm : Pour montrer qu'il existe des temps exceptionnels, il suffit de montrer que les coefficients de Fourier sont **concentrés sur les hautes fréquences**.

$f_R := \mathbb{1}_{\{0 \leftrightarrow R\}}$, $(\widehat{f}_R(S))_{S \subseteq \mathbb{T}_R}$ les coefficients de Fourier.

Benjamini-Kalai-Schramm : Il suffit de montrer que les coefficients de Fourier sont **concentrés sur les hautes fréquences**.

Definition (Garban-Pete-Schramm: une approche géométrique)

On appelle **spectral sample** de f_R (noté Spec_{f_R}) le sous-ensemble aléatoire de \mathbb{T}_R vérifiant : $\mathbb{P}[\text{Spec}_{f_R} = S] \propto \widehat{f}_R(S)^2$.



$f_R := \mathbb{1}_{\{0 \leftrightarrow R\}}$, $(\widehat{f}_R(S))_{S \subseteq \mathbb{T}_R}$ les coefficients de Fourier.

Benjamini-Kalai-Schramm : Il suffit de montrer que les coefficients de Fourier sont **concentrés sur les hautes fréquences**.

Definition (Garban-Pete-Schramm: une approche géométrique)

On appelle **spectral sample** de f_R (noté Spec_{f_R}) le sous-ensemble aléatoire de \mathbb{T}_R vérifiant : $\mathbb{P}[\text{Spec}_{f_R} = S] \propto \widehat{f}_R(S)^2$.

Il suffit de montrer que Spec_{f_R} est grand avec grande probabilité.

Théorème (Garban-Pete-Schramm, 2008)

$$\mathbb{P}[|\text{Spec}_{f_R}| \leq k] \simeq \frac{k^{5/36}}{R^{5/48}}.$$

$f_R := \mathbb{1}_{\{0 \leftrightarrow R\}}$, $(\widehat{f}_R(S))_{S \subseteq \mathbb{T}_R}$ les coefficients de Fourier.

Benjamini-Kalai-Schramm : Il suffit de montrer que les coefficients de Fourier sont **concentrés sur les hautes fréquences**.

Definition (Garban-Pete-Schramm: une approche géométrique)

On appelle **spectral sample** de f_R (noté Spec_{f_R}) le sous-ensemble aléatoire de \mathbb{T}_R vérifiant : $\mathbb{P}[\text{Spec}_{f_R} = S] \propto \widehat{f}_R(S)^2$.

Il suffit de montrer que Spec_{f_R} est grand avec grande probabilité.

Théorème (Garban-Pete-Schramm, 2008)

$$\mathbb{P}[|\text{Spec}_{f_R}| \leq k] \simeq \frac{k^{5/36}}{R^{5/48}}.$$

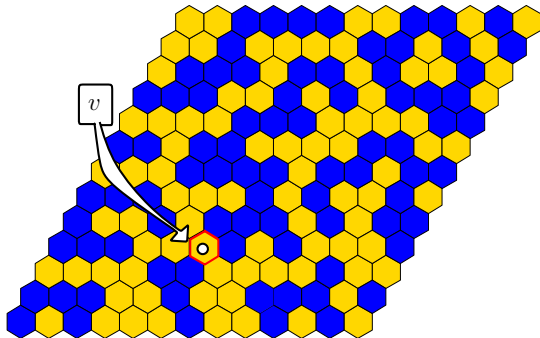
La dimension de Hausdorff est p.s. égale à $31/36$.

Broman-Garban-Steif, 2013: Modèle “plus physique” avec conservation des quantités.

- $\omega(0) \sim \mathbb{P}_p$, K matrice de transition symétrique sur les sites de \mathbb{T} . On laisse la configuration évoluer selon un processus d'exclusion de noyau K .

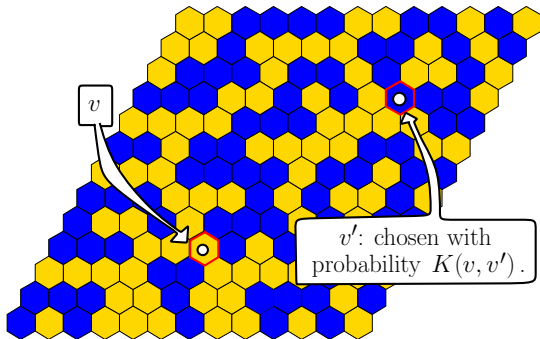
Broman-Garban-Steif, 2013: Modèle “plus physique” avec conservation des quantités.

- $\omega(0) \sim \mathbb{P}_p$, K matrice de transition symétrique sur les sites de \mathbb{T} . On laisse la configuration évoluer selon un processus d'exclusion de noyau K .



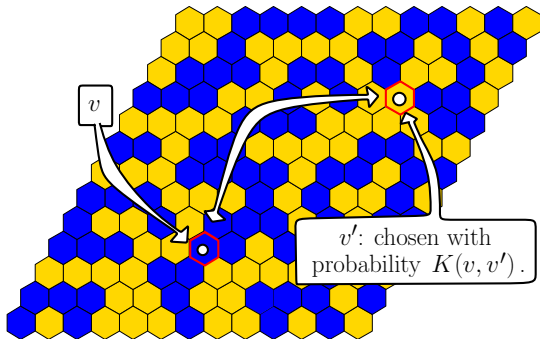
Broman-Garban-Steif, 2013: Modèle “plus physique” avec conservation des quantités.

- $\omega(0) \sim \mathbb{P}_p$, K matrice de transition symétrique sur les sites de \mathbb{T} . On laisse la configuration évoluer selon un processus d'exclusion de noyau K .



Broman-Garban-Steif, 2013: Modèle “plus physique” avec conservation des quantités.

- $\omega(0) \sim \mathbb{P}_p$, K matrice de transition symétrique sur les sites de \mathbb{T} . On laisse la configuration évoluer selon un processus d'exclusion de noyau K .



Broman-Garban-Steif, 2013: Modèle “plus physique” avec conservation des quantités.

- $\omega(0) \sim \mathbb{P}_p$, K matrice de transition symétrique sur les sites de \mathbb{T} . On laisse la configuration évoluer selon un processus d'exclusion de noyau K .
- Processus de Markov $(\omega_K(t))_{t \geq 0}$; \mathbb{P}_p est toujours invariante. Mêmes questions d'existence de temps exceptionnels.

Broman-Garban-Steif, 2013: Modèle “plus physique” avec conservation des quantités.

- $\omega(0) \sim \mathbb{P}_p$, K matrice de transition symétrique sur les sites de \mathbb{T} . On laisse la configuration évoluer selon un processus d'exclusion de noyau K .
- Processus de Markov $(\omega_K(t))_{t \geq 0}$; \mathbb{P}_p est toujours invariante. Mêmes questions d'existence de temps exceptionnels.

A. Plus proches voisins : choix uniforme parmi les 6 voisins.

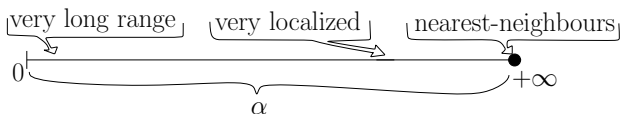
B. Dynamique α -stable : $K(v, v') \propto \frac{1}{\|v - v'\|_2^{2+\alpha}}$, $\alpha > 0$.

Broman-Garban-Steif, 2013: Modèle “plus physique” avec conservation des quantités.

- $\omega(0) \sim \mathbb{P}_p$, K matrice de transition symétrique sur les sites de \mathbb{T} . On laisse la configuration évoluer selon un processus d'exclusion de noyau K .
- Processus de Markov $(\omega_K(t))_{t \geq 0}$; \mathbb{P}_p est toujours invariante. Mêmes questions d'existence de temps exceptionnels.

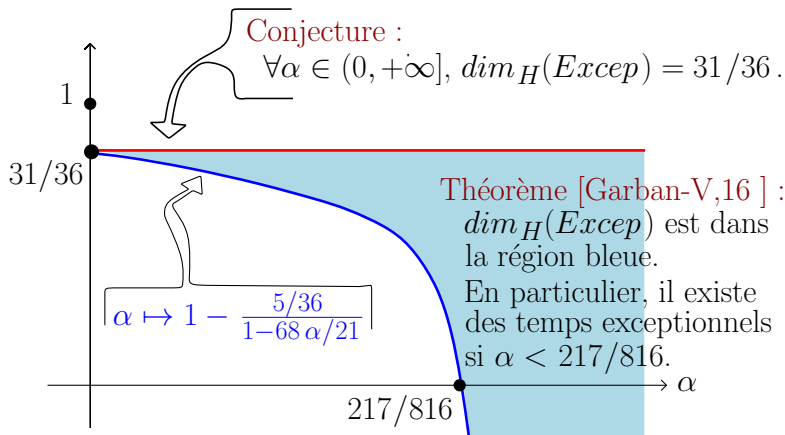
A. Plus proches voisins : choix uniforme parmi les 6 voisins.

B. Dynamique α -stable : $K(v, v') \propto \frac{1}{\|v - v'\|_2^{2+\alpha}}$, $\alpha > 0$.



- $K(v, v') \propto \frac{1}{\|v - v'\|_2^{2+\alpha}}$, $p = p_c = 1/2$.
- $Excep :=$ ensemble des temps exceptionnels.

- $K(v, v') \propto \frac{1}{\|v - v'\|_2^{2+\alpha}}$, $p = p_c = 1/2$.
- $Excep :=$ ensemble des temps exceptionnels.



Merci !