Mouvements browniens convolés

P. Vallois
Institut Élie Cartan de Lorraine, Université de Lorraine

Equipe-projet BIGS, INRIA

avec S. Rœlly (Potsdam University)

Journées de Probabilités, Aussois 19-23 juin 2017

PLAN

1. Rappels concernant les processus gaussiens et markoviens
2. Le processus d'Ornstein Ulhenbeck
3. Les mouvements browniens convolés
4. Les mouvements browniens convolés vectoriels

Cette présentation est basée sur:
S. Rœlly, P. Vallois: *Convoluted Brownian motion: a semimartingale approach*. Theory of Stochastic Processes Vol. 21 (37), no. 2, 2016, pp. 58?83

1. PROCESSUS GAUSSIENS ET MARKOVIENS

1.1 Processus gaussiens

- Un processus gaussien est une collection de variables aléatoires $(X_t)_{t\in I}$ telle que pour tout $0 < t_1 < \cdots < t_n$ appartenant à I, le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien de dimension n.
- Ici: $I = [0, 1]$ ou $[0, \infty[$.
- La loi du processus gaussien $(X_t)_{t\in I}$ est caractérisée par sa fonction moyenne m et sa fonction de covariance K:

$$m(t) := \mathbb{E}(X_t), \quad t \in I$$

$$K(s,t) := \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}(X_s X_t) - \mathbb{E}(X_s)\mathbb{E}(X_t), \quad s, t \in I.$$

Exemple 1
Le mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$, noté bm, est un processus gaussien, centré, issu de 0 au temps 0, i.e. $B_0 = 0$ et de fonction de covariance :

$$R^{mb}(s,t) = \inf\{s,t\}, \quad s,t \in [0,\infty[.$$

Exemple 2
Le processus d'Ornstein Ulhenbeck $(X_t^{OU})_{t\geq 0}$, noté OU, issu de $X_0^{OU} = x$, de paramètre λ est le processus gaussien de fonction moyenne

$$\mathbb{E}(X_t^{OU}) = xe^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

and de fonction de covariance :

$$\mathrm{Cov}(X_s^{OU}, X_t^{OU}) = e^{-\lambda t}\,\frac{\sinh(\lambda s)}{\lambda}, \quad 0 \leq s \leq t.$$

1.2 Processus de Markov

1. Points de vue analytique: semi-groupe, générateur.
2. Approche stochastique, équations différentielles stochastiques,....

Exemple 1: le mouvement brownien

- Son semi-groupe est

$$P_t(x, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp\left\{ -\frac{(y-x)^2}{2t} \right\} dy, \quad t > 0$$

- Son générateur

$$Lf(x) = \frac{1}{2} f''(x).$$

Exemple 2: le processus d'Ornstein Ulhenbeck

- Son semi-groupe est

$$P_t(x,f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^*}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp\Big\{ - \frac{\big(y - xe^{-\lambda t}\big)^2}{2t^*} \Big\} dy, \quad t > 0$$

with $t^* := \frac{1}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda t})$.

- Son générateur

$$Lf(x) = \frac{1}{2} f''(x) - \lambda x f'(x).$$

1.3 Processus de Markov et gaussiens

- Soit (X_t) un processus gaussien centré de fonction de covariance K.
- Ce processus est markovien si et seulement si

$$K(s,u)\,K(t,t) = K(s,t)\,K(t,u), \quad 0 \leq s \leq t \leq u.$$

- Il est aisé de vérifier que pour le mb et l' OU cette condition est vérifiée.

2. LE PROCESSUS D'ORNSTEIN-UHLENBECK

- Le processus d'OU est markovien et gaussien.
- Le processus d'OU issu de x est solution de

$$X_t = x + B_t - \lambda \int_0^t X_s ds, \quad t \geq 0.$$

- Cette équation différentielle linéaire stochastique peut être résolue explicitement:

$$X_t = xe^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s, \quad t \geq 0.$$

- Dans la suite, nous allons considérer le processus d'OU périodique : $X_0 = X_1$ et la "même" dynamique que le processus d'OU.

Définition

Le processus d' Ornstein-Uhlenbeck périodique , noté PerOU, est la solution de l'équation stochastique, avec une condition périodique:

$$\begin{cases} X_t & = X_0 + B_t - \lambda \int_0^t X_s ds, \quad t \in [0,1], \\ X_1 & = X_0, \end{cases} \tag{1}$$

où $(B_t, t \in [0,1])$ *est un mouvement brownien standard.*

Remarque

- *La valeur de* X_0 *ne peut pas être constante, le processus PerOU n'est pas adapté et n'est donc pas une semimartingale par rapport à la filtration brownienne.*
- *Le PerOU a été utilisé en filtrage, par Kwakernaak (1975).*

Proposition 2.1

L'unique solution de (1) *est:*

$$X_t^{perOU} = \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s + \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \int_t^1 e^{-\lambda(1+t-s)} dB_s$$

pour tout $t \in [0,1]$ *et*

$$X_1^{perOU} = X_0^{perOU} = \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \int_0^1 e^{-\lambda(1-s)} dB_s.$$

- On peut aussi écrire:

$$X_t^{perOU} = X_0^{perOU} e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s.$$

  qui présente une analogie avec X_t^{OU}.
- Pour la preuve, on calcule $d(X_t e^{-\lambda t})$ et on utilise le calcul stochastique généralisé.

Proposition 2.2

X^{perOU} est un processus gaussien centré, stationnaire, et de fonction de covariance:

$$R^{perOU}(h) = \frac{1}{2\lambda} \frac{\cosh\left(\lambda(h - 1/2)\right)}{\sinh(\lambda/2)}.$$

- Le processus étant gaussien et centré, il est stationnaire si et seulement si

  $$\mathrm{Cov}(X_s^{perOU}, X_t^{perOU}) = \mathrm{Cov}(X_0^{perOU}, X_{t-s}^{perOU}) = R^{perOU}(t-s), \quad 0 \leq s$$

- L'argument clé est : pour toute fonction ψ appartenant à $L^2([0,1])$, la v.a. $\int_0^1 \psi(s) dB_s$ est une v.a. gaussienne centrée et de covariance $\int_0^1 \psi(s)^2 ds$.

Proposition 2.3

1. *Soit ν la loi de X_0^{perOU}. Alors la loi du processus $(X_t^{perOU}, t \in [0,1])$ est un ν-mélange de ponts de processus de Markov:*

$$\mathcal{L}(X^{perOU}) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(Y^{xx})\nu(dx).$$

2. *Pour tout x réel, le processus $(Y_t^{xx}, t \in [0,1])$ est le pont $x \hookrightarrow x$ du processus d'Ornstein-Ulhenbeck process.*

Corollaire 2.4

Conditionnellement à X_0^{perOU}, le processus $(X_t^{perOU}, t \in [0,1])$ est un processus de Markov inhomogène.

Remarques

- *La proposition 2.3 a été mentionnée par Carmichael et al (1982) et démontrée par Roelly et al (2002).*
- *Notion de classe réciproque de processus, cf Jamison (1970) et le survey de Léonard et al (2014).*
- *La preuve de la proposition 2.3 repose sur la théorie du grossissement initial de filtration et plus particulièrement Chaleyat-Maurel et al 1983.*
- *On peut remplacer la condition de périodicité :* $X_1 = X_0$ *du PerOU par* $X_1 = f(X_0)$ *où* f *est une fonction à valeurs réelles.*
- *Sous certaines conditions, il existe un unique processus* X *ayant la dynamique du processus d'OU et vérifiant* $X_1 = f(X_0)$.

3. MOUVEMENTS BROWNIENS CONVOLÉS

3.1 Définition et premières propriétés

Rappel:

$$X_t^{perOU} = \mu \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s + \mu \int_t^1 e^{-\lambda(1+t-s)} dB_s$$

avec $\mu := \dfrac{1}{1 - e^{-\lambda}}$.

Definition

Pour toute fonction $\varphi \in L^2(0,1)$, le mouvement brownien convolé est le processus X^φ:

$$X_t^\varphi := \int_0^t \varphi(t-s)\, dB_s + \int_t^1 \varphi(1+t-s)\, dB_s, \quad t \in [0,1]. \tag{2}$$

Remarques

- *Puisque*

$$X_t^{\varphi} := \int_0^t \varphi(t-s)\, dB_s + \int_t^1 \varphi(1+t-s)\, dB_s, \quad t \in [0,1]$$

on déduit que X^{φ} *est périodique:* $X_0^{\varphi} = X_1^{\varphi} = \int_0^1 \varphi(1-s)\, dB_s$.

- *Posons:*

$$\widehat{B}_t := B_{1-t} - B_1, \quad \widehat{\varphi}(t) := \varphi(1-t), \quad t \in [0,1].$$

On peut écrire:

$$\begin{aligned} X^{\varphi}(t) &= \int_0^t \varphi(t-s)\, dB_s + \int_t^1 \varphi(1+t-s)\, dB_s \\ &= \varphi * dB(t) + \widehat{\varphi} * d\widehat{B}(1-t) \end{aligned}$$

Proposition 3.1

1. *Le processus* $(X_t^\varphi)_{0\le t\le 1}$ *est stationnaire, gaussien, centré et de fonction de covariance* $R^\varphi(h) := \mathrm{Cov}\big(X_s^\varphi, X_{s+h}^\varphi\big)$ *donnée par:*

$$R^\varphi(h) = \int_0^h \varphi(1-u)\varphi(h-u)du + \int_0^{1-h} \varphi(u)\varphi(h+u)du.$$

2. $(X_t^\varphi)_{0\le t\le 1}$ *est invariant par retournement du temps:*

$$\big(X_{1-t}^\varphi, 0 \le t \le 1\big) \overset{(loi)}{=} \big(X_t^\varphi, 0 \le t \le 1\big).$$

- L'application $\varphi \to X^\varphi$ est linéaire. Lorsque φ est à variation finie, on peut montrer l'existence d'un processus gaussien, centré $\big((Z(s,t),\ s,t \in [0,1]\big)$ tel que

$$X_t^\varphi = \varphi(0)B_1 + \int_0^1 Z(t,s)d\varphi(s), \quad t \in [0,1].$$

Proposition 3.2

Lorsque φ a une dérivée de carré intégrable:

$$(*) \qquad X_t^\varphi = X_0^\varphi + \big(\varphi(0) - \varphi(1)\big)B_t + \int_0^t X_s^{\varphi'} ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

- Rappelons que le processus PerOU est obtenu avec $\varphi(t) := \mu e^{-\lambda t}$. Mais $\varphi' = -\lambda\varphi$, donc

$$X_s^{\varphi'} = -\lambda X_s^\varphi$$

L'équation (*) est autonome, i.e. peut être résolue.

Exemple 1: Mouvements browniens trigonométriques convolés

En utilisant:

$$X_t^{\varphi} = X_0^{\varphi} + \big(\varphi(0) - \varphi(1)\big) B_t + \int_0^t X_s^{\varphi'}\, ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

avec successivement $\varphi = \cos$ et $\varphi = \sin$, on montre aisément que le processus $(X^{\cos}, X^{\sin})$ satisfait le système autonome d'équations:

$$\begin{cases} X_t^{\cos} &= \displaystyle\int_0^1 \cos\big(\lambda(1-s)\big)\, dB_s + \big(1 - \cos\lambda\big) B_t - \lambda \int_0^t X_s^{\sin}\, ds, \\ X_t^{\sin} &= \displaystyle\int_0^1 \sin\big(\lambda(1-s)\big)\, dB_s - \sin\lambda\, B_t + \lambda \int_0^t X_s^{\cos}\, ds, \end{cases}$$

où $\lambda \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Example 1: Mouvements browniens monomiaux convolés

- Pour $\varphi(u) = u^k$, où $k \in \mathbb{N}$, on note $X^{\sharp k}$ le mouvement brownien convolé associé.
- Compte tenu de la relation (*) précédente, le processus $X^{\sharp k}$ satisfait:

$$X_t^{\sharp k} = X_0^{\sharp k} - B_t + k \int_0^t X_s^{\sharp (k-1)} \, ds.$$

- Pour obtenir une équation autonome, on considère le vecteur $\mathbf{X}^{\sharp k}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k+1}$ et dont les coordonnées sont $X^{\sharp k}, \cdots, X^{\sharp 1}, X^{\sharp 0}$.
- $\mathbf{X}^{\sharp k}$ vérifie le système linéaire:

$$\mathbf{X}_t^{\sharp k} = \mathbf{X}_0^{\sharp k} - B_t C + \int_0^t A\,\mathbf{X}_s^{\sharp k}\, ds,$$

avec:

$$C := \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A := \begin{bmatrix} 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & \dots & & 0 \end{bmatrix}$$

4. MOUVEMENTS BROWNIENS VECTORIELS CONVOLÉS

Définition

Soit A une matrice $n \times n$ et ϕ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Soit $X^{A,\phi}$ le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^n$:

$$X_t^{A,\phi} := \int_0^t e^{(t-s)A}\phi\, dB_s + \int_t^1 e^{(1+t-s)A}\phi\, dB_s, \quad t \in [0,1],$$

où $\big(B_t, t \in [0,1]\big)$ est comme précédemment un mouvement brownien standard à valeurs réelles.

Remarque

- En choisissant $\phi = (1,0)^*$ et $A := \lambda \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on retrouve $(X^{\cos}, X^{\sin})^* = \mathbf{X}^{A,\phi}$.
- $\mathbf{X}^{\sharp k} = \mathbf{X}^{A,\phi}$ et $\phi = (0, \cdots, 0, 1)^*$

- Il est facile de mettre le processus $X^{A,\phi}$ sous la forme:

$$X_t^{A,\phi} = e^{tA} X_0^{A,\phi} + (Id - e^{A}) \int_0^t e^{(t-s)A} \phi \, dB_s.$$

- On définit la fonction ρ sur $[0, 1]$ et à valeurs dans les matrices $n \times n$:

$$\rho(t) := \int_0^t e^{uA} \phi \phi^* e^{uA^*} du, \quad t \in [0, 1].$$

Proposition 4.1

Le processus $(X_t^{A,\phi})_{t\in[0,1]}$ est gaussien, centré, stationnaire. De plus, pour tout $0 \leq s \leq s + h \leq 1$, :

$$\mathbf{Cov}\left(X_s^{A,\phi}, X_{s+h}^{A,\phi}\right) = e^{hA} \rho(1-h) + \rho(h) e^{(1-h)A^*}.$$

Théorème 4.2

Supposons:

$(H1)$ *la matrice* $e^A - Id$ *est inversible*

et

$(H2)$ $$\mathrm{Span}(A^k\phi, k \in \mathbb{N}) = \mathbb{R}^n$$

Soit ν *la loi du vecteur gaussien* $X_0^{A,\phi}$. *Alors, la loi du processus* $X^{A,\phi}$ *est un* ν*-mélange de ses ponts, où le* $\mathbf{x} \hookrightarrow \mathbf{x}$*-pont vérifie l'eds affine à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} dZ_t &= (e^A - Id)\phi \, d\widetilde{B}_t + (\Lambda_t^0 \, \mathbf{x} + \Lambda_t^1 Z_t) \, dt, \quad t \in [0,1[, \\ Z_0 &= \mathbf{x}. \end{cases}$$

où $\widetilde{B}$ est un mb standard à valeurs réelles et les matrices Λ^0 et Λ^1 sont explicites.

Remarque

- Le théorème 4.2 s'applique pour les mouvements browniens trigonométriques convolés $(X^{\cos}, X^{\sin})$, i.e. les deux conditions (H1) et (H2) sont vérifiées.
- En revanche quant aux mouvements browniens trigonométriques convolés, l'hypothèse (H1) n'est pas vérifiée, i.e. $e^A - Id$ n'est pas inversible.
- Supposons $k = 1$.
  - $X_t^{\sharp 0} = B_1, \quad X_t^{\sharp 1} = \int_0^1 B_r dr + tB_1 - B_t.$
  - Posons :
  $$\bar{X}_t := \int_0^t X_s^{\sharp 1} ds, \quad Z_t := (X_t^{\sharp 0}, X_t^{\sharp 1}, \bar{X}_t)^*.$$
  Alors, conditionnellement à Z_0, $(Z_t, t \in [0,1])$ est le pont d'un processus de Markov.
  - Des résultats proches dans un preprint de Görgens (2013).