Linéarisation de Processus de Markov Déterministe par morceaux autour d'un équilibre

Edouard STRICKLER (Université de Neuchâtel)

–

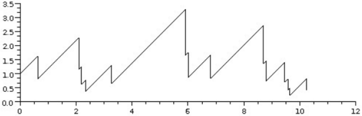
avec Michel Benaïm

Aussois - Journées Probabilités

22 juin 2017

Qu'est-ce qu'un PDMP ?

Un processus qui suit des trajectoires déterministes entre des sauts aléatoires.
Exemples : Processus de Poisson, TCP process, zigzag process...



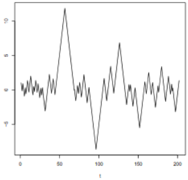


Figure: exemple de trajectoires du TCP et du Zigzag

Qu'est-ce qu'un PDMP ?

Un processus qui suit des trajectoires déterministes entre des sauts aléatoires.
Exemples : Processus de Poisson, TCP process, zigzag process...

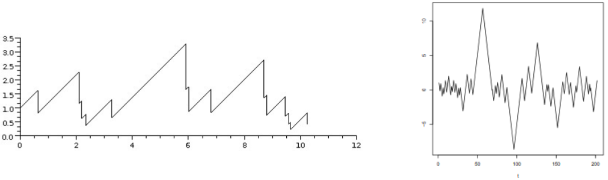


Figure: exemple de trajectoires du TCP et du Zigzag

Ce sont des processus de type Lévy...

PDMP : modèle à changements Markoviens

Processus $(Z_t)_{t\geq 0} = (X_t, I_t)_{t\geq 0}$ sur $\mathbb{R}^d \times E$, avec E fini

PDMP : modèle à changements Markoviens

Processus $(Z_t)_{t \geq 0} = (X_t, I_t)_{t \geq 0}$ sur $\mathbb{R}^d \times E$, avec E fini
3 ingrédients :

PDMP : modèle à changements Markoviens

Processus $(Z_t)_{t\geq 0} = (X_t, I_t)_{t\geq 0}$ sur $\mathbb{R}^d \times E$, avec E fini
3 ingrédients :

- $\forall i \in E$, $F^i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ régulier

PDMP : modèle à changements Markoviens

Processus $(Z_t)_{t\geq 0} = (X_t, I_t)_{t\geq 0}$ sur $\mathbb{R}^d \times E$, avec E fini
3 ingrédients :

- $\forall i \in E$, $F^i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ régulier
- $\forall i \in E$, $\lambda(\cdot, i) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ taux de sauts continu

PDMP : modèle à changements Markoviens

Processus $(Z_t)_{t\geq 0} = (X_t, I_t)_{t\geq 0}$ sur $\mathbb{R}^d \times E$, avec E fini
3 ingrédients :

- $\forall i \in E$, $F^i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ régulier
- $\forall i \in E$, $\lambda(\cdot, i) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ taux de sauts continu
- $\forall i,j \in E$, $Q(\cdot, i, j) : \mathbb{R}^d \to [0, 1]$ continue,
  $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $(Q(x, i, j))_{(i,j)\in E^2}$ matrice stochastique irréductible

Construction

Le flot

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_t = F^i(x_t) \\ x_0 = x \end{cases}$$

admet une unique solution : $(\Phi_t^i(x))_{t\geq 0}$

Construction

Le flot

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_t = F^i(x_t) \\ x_0 = x \end{cases}$$

admet une unique solution : $(\Phi_t^i(x))_{t \geq 0}$

Le premier temps de saut

$$\mathbb{P}_{x,i}(T_1 > t) = \exp\left(- \int_0^t \lambda(\Phi_s^i(x), i) \, \mathrm{d}s \right)$$

Le processus

- $(X_0, I_0) = (x, i) \in \mathbb{R}^d \times E$

Le processus

- $(X_0, I_0) = (x, i) \in \mathbb{R}^d \times E$
- $\forall t < T_1,\ X_t = \Phi_t^i(x)$ et $I_t = i$

Le processus

- $(X_0, I_0) = (x, i) \in \mathbb{R}^d \times E$
- $\forall t < T_1$, $X_t = \Phi_t^i(x)$ et $I_t = i$
- en T_1 : $I_{T_1} = j$ avec probabilité $Q(X_{T_1^-}, i, j)$ et $X_{T_1} = X_{T_1^-}$

Le processus

- $(X_0, I_0) = (x, i) \in \mathbb{R}^d \times E$
- $\forall t < T_1$, $X_t = \Phi_t^i(x)$ et $I_t = i$
- en T_1 : $I_{T_1} = j$ avec probabilité $Q(X_{T_1^-}, i, j)$ et $X_{T_1} = X_{T_1^-}$
- T_2 défini similairement à T_1

Le processus

- $(X_0, I_0) = (x, i) \in \mathbb{R}^d \times E$
- $\forall t < T_1$, $X_t = \Phi_t^i(x)$ et $I_t = i$
- en T_1 : $I_{T_1} = j$ avec probabilité $Q(X_{T_1^-}, i, j)$ et $X_{T_1} = X_{T_1^-}$
- T_2 défini similairement à T_1
- $\forall t < T_2$, $X_t = \Phi_{t-T_1}^{I_{T_1}}(X_{T_1})$ et $I_t = I_{T_1}$

Le processus

- $(X_0, I_0) = (x, i) \in \mathbb{R}^d \times E$
- $\forall t < T_1$, $X_t = \Phi_t^i(x)$ et $I_t = i$
- en T_1 : $I_{T_1} = j$ avec probabilité $Q(X_{T_1^-}, i, j)$ et $X_{T_1} = X_{T_1^-}$
- T_2 défini similairement à T_1
- $\forall t < T_2$, $X_t = \Phi_{t-T_1}^{I_{T_1}}(X_{T_1})$ et $I_t = I_{T_1}$

En résumé, $\dot{X}_t = F^{I_t}(X_t)$ avec $\mathbb{P}(I_{t+s} = j | (X_u, I_u)_{u \leq t}) = \lambda_i(X_t) Q(X_t, i, j) s + o(s)$ pour $i \neq j$ sur $\{I_t = i\}$.

Le processus

- $(X_0, I_0) = (x, i) \in \mathbb{R}^d \times E$
- $\forall t < T_1$, $X_t = \Phi_t^i(x)$ et $I_t = i$
- en T_1 : $I_{T_1} = j$ avec probabilité $Q(X_{T_1^-}, i, j)$ et $X_{T_1} = X_{T_1^-}$
- T_2 défini similairement à T_1
- $\forall t < T_2$, $X_t = \Phi_{t-T_1}^{I_{T_1}}(X_{T_1})$ et $I_t = I_{T_1}$

En résumé, $\dot{X}_t = F^{I_t}(X_t)$ avec $\mathbb{P}(I_{t+s} = j | (X_u, I_u)_{u \leq t}) = \lambda_i(X_t) Q(X_t, i, j) s + o(s)$ pour $i \neq j$ sur $\{I_t = i\}$.
Remarque : si $\lambda_i(x) = \lambda_i$ et $Q(x, i, j) = Q_{ij}$, $(I_t)_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov avec matrice d'intensité $(\lambda_i Q_{ij})_{i,j}$. Par contre X n'est pas markovien.

Semi-groupe et Générateur

Semi-groupe

Le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov.
Le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ associé est Feller

$$P_t f(x,i) = \mathbb{E}\left[f(Z_t) | Z_0 = (x,i)\right]$$

Générateur infinitésimal

Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \times E \to \mathbb{R}$ régulière

$$Lf(x,i) = \langle F^i(x), \nabla f(x,i) \rangle + \lambda(x,i) \sum_{j\in E} Q(x,i,j) \left(f(x,j) - f(x,i)\right)$$

où

$$Lf = \lim_{t\to 0} \frac{P_t f - f}{t}.$$

Hypothèse

$\forall i \in E$, $F^i(0) = 0$ et il existe un compact M tel que $X_0 \in M \Rightarrow Z_t \in M \times E$

Hypothèse

$\forall i \in E$, $F^i(0) = 0$ et il existe un compact M tel que $X_0 \in M \Rightarrow Z_t \in M \times E$

Question : En switchant aléatoirement entre ces champs de vecteurs, quel est le comportement au voisinage de 0, et comment peut-on le prédire ?

Quelques exemples épidémiologiques

F^1 et F^2 deux champs de vecteurs Susceptible - Infecté - Susceptible (SIS) sur $\mathbb{R}^2$:

$$F^i(x,y) = \begin{cases} (1-x)(a_i x + b_i y) - \alpha_i x \\ (1-y)(c_i x + D_i y) - \beta_i y \end{cases}$$

avec $a_i, b_i, c_i, d_i, \alpha_i, \beta_i > 0$.
On remarque que pour $i \in \{1,2\}$, $F^i(0) = 0$.

Comportement déterministe

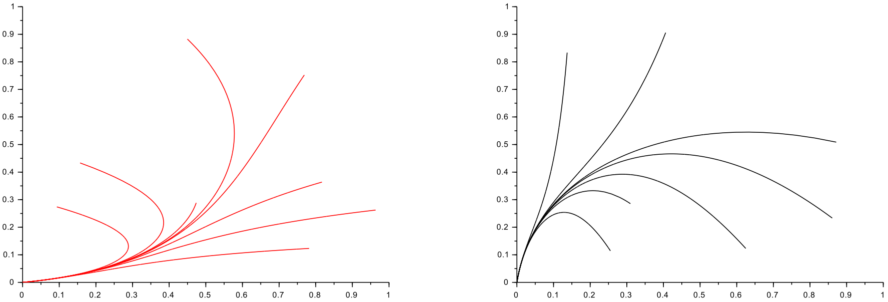
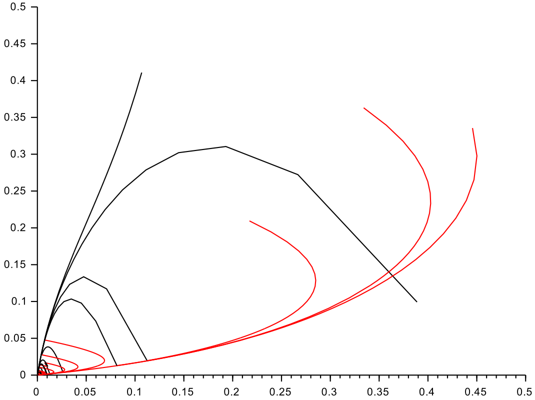


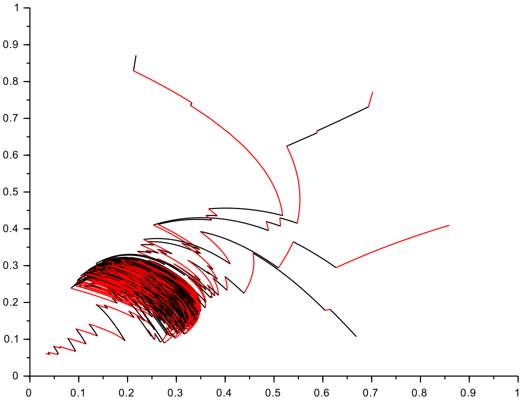
Figure: exemple de trajectoires de F^1 et F^2 pour lesquels 0 est globalement stable

Dans chaque environnement, la maladie va disparaître.

Avec peu de sauts



Avec beaucoup de sauts



La variation entre les environnements peut conduire à la persistence de la maladie dans la population.

Exemple opposé

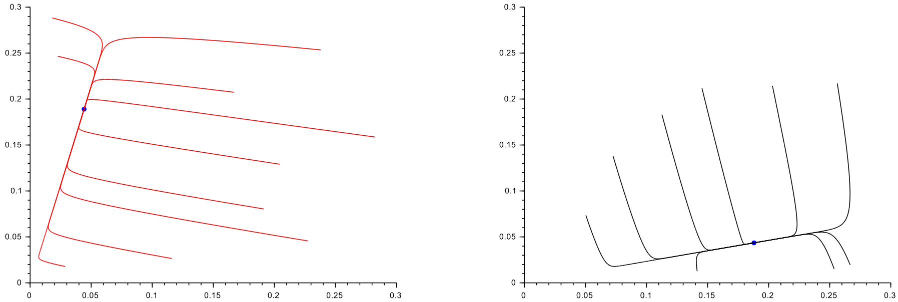
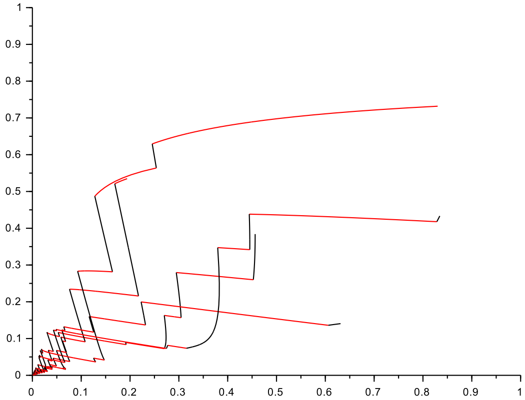


Figure: exemple de trajectoires de F^1 et F^2 pour lesquels 0 est un répulseur

Avec beaucoup de sauts



La variation entre les environnements peut conduire à l'éradication de la maladie.

Stratégie déterministe autour d'un équilibre d'une EDO

$\dot{x} = F(x)$ avec $F(0) = 0$.

Stratégie déterministe autour d'un équilibre d'une EDO

$\dot{x} = F(x)$ avec $F(0) = 0$.
Système linéarisé en 0 : $\dot{y} = Ay$, avec $A = DF(0)$. Alors

Stratégie déterministe autour d'un équilibre d'une EDO

$\dot{x} = F(x)$ avec $F(0) = 0$.
Système linéarisé en 0 : $\dot{y} = Ay$, avec $A = DF(0)$. Alors

- si $\forall \lambda \in Sp(A), Re(\lambda) < 0$ alors $x_t \to 0$ localement exponentiellement vite ;

Stratégie déterministe autour d'un équilibre d'une EDO

$\dot{x} = F(x)$ avec $F(0) = 0$.
Système linéarisé en 0 : $\dot{y} = Ay$, avec $A = DF(0)$. Alors

- si $\forall \lambda \in Sp(A), Re(\lambda) < 0$ alors $x_t \to 0$ localement exponentiellement vite ;
- si $\exists \lambda \in Sp(A), Re(\lambda) > 0$ alors x_t "s'éloigne de 0 dans la majorité des cas"

Système linéaire aléatoire pas si simple...

Cas particulier où $F^i(x) = A_i x$ pour une certaine matrice A_i.

Benaïm, Le Borgne, Malrieu, Zitt 2012

Exemples avec A_0, A_1 matrices 2×2 **stable**, et $A_0 + A_1$ **instable**. Then

- Taux de sauts inférieurs à une valeur critique $\Rightarrow \|X_t\| \to 0$.
- Taux supérieurs $\Rightarrow \|X_t\| \to \infty$.

Système linéaire aléatoire pas si simple...

Cas particulier où $F^i(x) = A_i x$ pour une certaine matrice A_i.

Benaïm, Le Borgne, Malrieu, Zitt 2012

Exemples avec A_0, A_1 matrices 2×2 **stable**, et $A_0 + A_1$ **instable**. Then

- Taux de sauts inférieurs à une valeur critique $\Rightarrow \|X_t\| \to 0$.
- Taux supérieurs $\Rightarrow \|X_t\| \to \infty$.

Lawley, Mattingly and Reed 2012

Exemples avec A_0, A_1 matrices 2×2 **stable**, et $\forall s \in (0,1)$, $(1-s)A_0 + sA_1$ **stable**. Alors

- Taux de sauts "petits" ou "grands" $\Rightarrow \|X_t\| \to 0$.
- Taux de sauts dans un intervalle borné critique $\Rightarrow \|X_t\| \to \infty$.

- En général, on ne peut rien conclure du comportement déterministe de chaque champs de vecteur, ni même de leurs combinaisons convexes.

- En général, on ne peut rien conclure du comportement déterministe de chaque champs de vecteur, ni même de leurs combinaisons convexes.
- Que peut-on dire dans le cas **non-linéaire**, et comment peut-on déduire le comportement du processus d'un système linéaire ?

Retour à notre PDMP non-linéaire : $\dot{X}_t = F^{I_t}(X_t)$.

PDMP linéarisé

$\dot{Y}_t = A_{J_t} Y_t$, avec $A_i = DF^i(0)$ et J chaîne de Markov avec taux de transition $\lambda_i(0) Q_{ij}(0)$.

Retour à notre PDMP non-linéaire : $\dot{X}_t = F^{I_t}(X_t)$.

PDMP linéarisé

$\dot{Y}_t = A_{J_t} Y_t$, avec $A_i = DF^i(0)$ et J chaîne de Markov avec taux de transition $\lambda_i(0) Q_{ij}(0)$.

Comment peut-on contrôler Y ?

Retour à notre PDMP non-linéaire : $\dot{X}_t = F^{I_t}(X_t)$.

PDMP linéarisé

$\dot{Y}_t = A_{J_t} Y_t$, avec $A_i = DF^i(0)$ et J chaîne de Markov avec taux de transition $\lambda_i(0)Q_{ij}(0)$.

Comment peut-on contrôler Y ?

En étudiant $\lim \frac{1}{t} \log \|Y_t\|$...

Projection sur la sphère

$\rho_t = \|Y_t\|$ et $\Theta_t = \frac{Y_t}{\|Y_t\|}$.

Alors (ρ, Θ, J) et (Θ, J) sont encore des PDMP.

Projection sur la sphère

$\rho_t = \|Y_t\|$ et $\Theta_t = \frac{Y_t}{\|Y_t\|}$.

Alors (ρ, Θ, J) et (Θ, J) sont encore des PDMP.
Si μ est une probabilité ergodique pour (Θ, J)

$$\Rightarrow \lim \frac{1}{t} \log \|Y_t\| = \int_{S \times E} \langle A_i \theta, \theta \rangle \mathrm{d}\mu(\theta, i) := \Lambda(\mu)$$

pour μ presque-tout (θ, j).

Projection sur la sphère

$\rho_t = \|Y_t\|$ et $\Theta_t = \frac{Y_t}{\|Y_t\|}$.

Alors (ρ, Θ, J) et (Θ, J) sont encore des PDMP.
Si μ est une probabilité ergodique pour (Θ, J)

$$\Rightarrow \lim \frac{1}{t} \log \|Y_t\| = \int_{S \times E} \langle A_i \theta, \theta \rangle \mathrm{d}\mu(\theta, i) := \Lambda(\mu)$$

pour μ presque-tout (θ, j).

Taux de croissance moyens - exposants de Lyapunov

$\Lambda^+ = \max \Lambda(\mu)$ and $\Lambda^- = \min \Lambda(\mu)$

Projection sur la sphère

$\rho_t = \|Y_t\|$ et $\Theta_t = \frac{Y_t}{\|Y_t\|}$.

Alors (ρ, Θ, J) et (Θ, J) sont encore des PDMP.
Si μ est une probabilité ergodique pour (Θ, J)

$$\Rightarrow \lim \frac{1}{t} \log \|Y_t\| = \int_{S\times E} \langle A_i \theta, \theta \rangle \mathrm{d}\mu(\theta, i) := \Lambda(\mu)$$

pour μ presque-tout (θ, j).

Taux de croissance moyens - exposants de Lyapunov

$\Lambda^+ = \max \Lambda(\mu)$ and $\Lambda^- = \min \Lambda(\mu)$

Résultats principaux : Le comportement local de X autour de 0 est donné par le signe des exposants de Lyapunov

Extinction

Théorème

On suppose $\Lambda^+ < 0$. Alors $\forall \alpha \in (\Lambda^+, 0)$, il existe $\eta > 0$ et un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 tel que

$$X_0 \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathbb{P}_{x,i}(\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log(\|X_t\|) \leq \alpha) \geq \eta.$$

Extinction

Théorème

On suppose $\Lambda^+ < 0$. Alors $\forall \alpha \in (\Lambda^+, 0)$, il existe $\eta > 0$ et un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 tel que

$$X_0 \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathbb{P}_{x,i}(\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log(\|X_t\|) \leq \alpha) \geq \eta.$$

Si de plus 0 est **accessible** alors pour tous $x \in M$ et $i \in E$

$$\mathbb{P}_{x,i}(\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log(\|X_t\|) \leq \Lambda^+) = 1.$$

Persistence

Théorème

On suppose $\Lambda^- > 0$. Alors

Persistence

Théorème

On suppose $\Lambda^- > 0$. Alors

1. Il existe une probabilité invariante μ pour Z telle que $\mu(\{0\} \times E) = 0$. De plus pour un certain $\theta > 0$,

$$\sum_{i \in E} \int \|x\|^{-\theta} \mu^i(dx) < \infty.$$

Persistence

Théorème

On suppose $\Lambda^- > 0$. Alors

1. Il existe une probabilité invariante μ pour Z telle que $\mu(\{0\} \times E) = 0$. De plus pour un certain $\theta > 0$,

$$\sum_{i \in E} \int \|x\|^{-\theta} \mu^i(dx) < \infty.$$

2. $\forall \varepsilon > 0\,;\ \exists r > 0$ tel que

$$\limsup \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_{\|X_s\| \leq r} \mathrm{d}s \leq \varepsilon \quad p.s.$$

Persistence

Théorème

On suppose $\Lambda^- > 0$. Alors

1. Il existe une probabilité invariante μ pour Z telle que $\mu(\{0\} \times E) = 0$. De plus pour un certain $\theta > 0$,
$$\sum_{i \in E} \int \|x\|^{-\theta} \mu^i(dx) < \infty.$$
2. $\forall \varepsilon > 0\,; \exists r > 0$ tel que
$$\limsup \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_{\|X_s\| \leq r} \mathrm{d}s \leq \varepsilon \quad p.s.$$
3. Soit $\tau^\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : \ \|X_t\| \geq \varepsilon\}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$, $a > 0$ et $c > 0$ t.q.
$$\mathbb{E}_{x,i}(\mathrm{e}^{a\tau^\varepsilon}) \leq c(1 + \|x\|^{-\theta}).$$

Persistence

Théorème

On suppose $\Lambda^- > 0$ et qu'il existe un point $p \in M \setminus \{0\}$ **accessible** auquel la **condition de crochet faible** (condition type Hörmander) est vérifiée. Alors

Persistence

Théorème

On suppose $\Lambda^- > 0$ et qu'il existe un point $p \in M \setminus \{0\}$ **accessible** auquel la **condition de crochet faible** (condition type Hörmander) est vérifiée. Alors

1. La probabilité invariante μ de Z telle que $\mu(\{0\} \times E) = 0$ est unique

Persistence

Théorème

On suppose $\Lambda^- > 0$ et qu'il existe un point $p \in M \setminus \{0\}$ **accessible** auquel la **condition de crochet faible** (condition type Hörmander) est vérifiée. Alors

1. La probabilité invariante μ de Z telle que $\mu(\{0\} \times E) = 0$ est unique
2. μ est absolument continue par rapport à **Leb** $\otimes \left(\sum_{i \in E} \delta_i\right)$

Persistence

Théorème

On suppose $\Lambda^- > 0$ et qu'il existe un point $p \in M \setminus \{0\}$ **accessible** auquel la **condition de crochet faible** (condition type Hörmander) est vérifiée. Alors

1. La probabilité invariante μ de Z telle que $\mu(\{0\} \times E) = 0$ est unique
2. μ est absolument continue par rapport à **Leb** $\otimes \left(\sum_{i \in E} \delta_i\right)$
3. Résultat ergodique : pour toute $f : M \times E \to \mathbb{R}$ mesurable bornée,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(Z_s) \mathrm{d}s = \int f \mathrm{d}\mu. \quad a.s.$$

Persistence

Théorème

On suppose $\Lambda^- > 0$ et qu'il existe un point $p \in M \setminus \{0\}$ **accessible** auquel la **condition de crochet forte** (condition type Hörmander) est vérifiée. Alors il existe $\kappa, \theta > 0$ tels que

$$\|\mathbb{P}_{x,i}(Z_t \in \cdot) - \mu\|_{TV} \leq C(1 + \|x\|^{-\theta})e^{-\kappa t}.$$

Retour aux exemples - Modèles épidémiologiques déterministes

- Une maladie se répand dans la population

Retour aux exemples - Modèles épidémiologiques déterministes

- Une maladie se répand dans la population
- d groupes dans la population

Retour aux exemples - Modèles épidémiologiques déterministes

- Une maladie se répand dans la population
- d groupes dans la population
- $x_k \in [0, 1]$ la proportion d'infectés dans le groupe k

Retour aux exemples - Modèles épidémiologiques déterministes

- Une maladie se répand dans la population
- d groupes dans la population
- $x_k \in [0, 1]$ la proportion d'infectés dans le groupe k
- évolution $\dot{x} = F(x)$ avec $x = (x_1, \ldots, x_d)$

Retour aux exemples - Modèles épidémiologiques déterministes

- Une maladie se répand dans la population
- d groupes dans la population
- $x_k \in [0,1]$ la proportion d'infectés dans le groupe k
- évolution $\dot{x} = F(x)$ avec $x = (x_1, \ldots, x_d)$
- $F(0) = 0$ (pas de création spontanée de la maladie)

Retour aux exemples - Modèles épidémiologiques déterministes

- Une maladie se répand dans la population
- d groupes dans la population
- $x_k \in [0,1]$ la proportion d'infectés dans le groupe k
- évolution $\dot{x} = F(x)$ avec $x = (x_1, \ldots, x_d)$
- $F(0) = 0$ (pas de création spontanée de la maladie)
- Le flot Φ_t est monotone : $x \leq y \Rightarrow \Phi_t(x) \leq \Phi_t(y)$

Retour aux exemples - Modèles épidémiologiques déterministes

- Une maladie se répand dans la population
- d groupes dans la population
- $x_k \in [0, 1]$ la proportion d'infectés dans le groupe k
- évolution $\dot{x} = F(x)$ avec $x = (x_1, \dots, x_d)$
- $F(0) = 0$ (pas de création spontanée de la maladie)
- Le flot Φ_t est monotone : $x \leq y \Rightarrow \Phi_t(x) \leq \Phi_t(y)$
- Le flot Φ_t est sous-homogène : $\lambda > 1 \Rightarrow \Phi_t(\lambda x) < \lambda \Phi_t(x)$

Retour aux exemples - Modèles épidémiologiques déterministes

- Une maladie se répand dans la population
- d groupes dans la population
- $x_k \in [0,1]$ la proportion d'infectés dans le groupe k
- évolution $\dot{x} = F(x)$ avec $x = (x_1, \dots, x_d)$
- $F(0) = 0$ (pas de création spontanée de la maladie)
- Le flot Φ_t est monotone : $x \leq y \Rightarrow \Phi_t(x) \leq \Phi_t(y)$
- Le flot Φ_t est sous-homogène : $\lambda > 1 \Rightarrow \Phi_t(\lambda x) < \lambda \Phi_t(x)$
- Irreducibilité : la maladie peut se répandre du groupe k au groupe l

Retour aux exemples - Modèles épidémiologiques déterministes

- Une maladie se répand dans la population
- d groupes dans la population
- $x_k \in [0,1]$ la proportion d'infectés dans le groupe k
- évolution $\dot{x} = F(x)$ avec $x = (x_1, \dots, x_d)$
- $F(0) = 0$ (pas de création spontanée de la maladie)
- Le flot Φ_t est monotone : $x \leq y \Rightarrow \Phi_t(x) \leq \Phi_t(y)$
- Le flot Φ_t est sous-homogène : $\lambda > 1 \Rightarrow \Phi_t(\lambda x) < \lambda \Phi_t(x)$
- Irreducibilité : la maladie peut se répandre du groupe k au groupe l

F : champ de vecteurs épidémiques

Dichotomie déterministe

Théorème (Lajmanovic-Yorke ; Hirsh, 1994)

F un champ de vecteur épidémique, $A = DF(0)$,
$\lambda(A) = \max\{Re(\lambda) \ : \lambda \in Sp(A)\}$.

1. $\lambda(A) \leq 0 \Rightarrow \forall x_0, x_t \to 0$
2. $\lambda(A) > 0 \Rightarrow \exists x^* \neq 0, \forall x_0 \neq 0, x_t \to x^*$.

Dichotomie aléatoire

La façon dont la maladie se répand dépend de l'environnement qui varie de manière aléatoire.

Théorème

F^i des champs de vecteurs épidémiques, $(I_t)_{t\geq 0}$ chaîne de Markov sur $E = \{1, \ldots N\}$.

Dichotomie aléatoire

La façon dont la maladie se répand dépend de l'environnement qui varie de manière aléatoire.

Théorème

F^i des champs de vecteurs épidémiques, $(I_t)_{t \geq 0}$ chaîne de Markov sur $E = \{1, \ldots N\}$.

1. $\Lambda^+ = \Lambda^- := \Lambda$;

Dichotomie aléatoire

La façon dont la maladie se répand dépend de l'environnement qui varie de manière aléatoire.

Théorème

F^i des champs de vecteurs épidémiques, $(I_t)_{t \geq 0}$ chaîne de Markov sur $E = \{1, \ldots N\}$.

1. $\Lambda^+ = \Lambda^- := \Lambda$;
2. Si $\Lambda < 0$ alors pour tout $x \in [0,1]^d$,

$$\mathbb{P}_{x,i}(\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log(\|X_t\|) \leq \Lambda) = 1.$$

Dichotomie aléatoire

La façon dont la maladie se répand dépend de l'environnement qui varie de manière aléatoire.

Théorème

F^i des champs de vecteurs épidémiques, $(I_t)_{t \geq 0}$ chaîne de Markov sur $E = \{1, \dots N\}$.

1. $\Lambda^+ = \Lambda^- := \Lambda$;
2. Si $\Lambda < 0$ alors pour tout $x \in [0,1]^d$,
$$\mathbb{P}_{x,i}(\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log(\|X_t\|) \leq \Lambda) = 1.$$
3. Si $\Lambda > 0$, Z admet une unique probabilité invariante Π telle que $\Pi(\{0\} \times E) = 0$. De plus, il existe une distance d sur $(0,1]^d \times E$ et $\exists r > 0$ tels que $\forall x \neq 0$,
$$\mathcal{W}_d(\mathbb{P}(Z_t \in \cdot), \Pi) \leq \mathrm{e}^{-rt} \mathcal{W}_d(\delta_x, \Pi)$$
$\mathcal{W}_d$ est la distance de Wasserstein associée à d.

Dans le cas aléatoire : seulement une presque dichotomie.

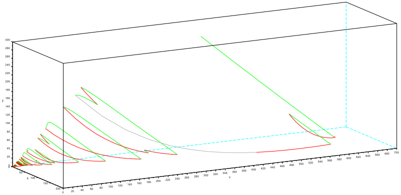
Conjecture

Pour F^i des champs de vecteurs épidémiques, $(I_t)_{t\geq 0}$ chaîne de Markov sur $E = \{1, \dots N\}$, si $\Lambda^+ = 0$, alors X_t converge vers 0.

Exemple en dimension 3

F^0 et F^1 deux champs de vecteur SIS en dimension 3 tels que, pour tout $t \in [0,1]$, 0 is globalement asymptotiquement stable pour $F_t = tF^1 + (1-t)F^0$.
$(I_t)_{t \geq 0}$ chaîne de Markov sur $E = \{0,1\}$ avec matrice d'intensité

$$Q = \begin{pmatrix} -\beta & \beta \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$$



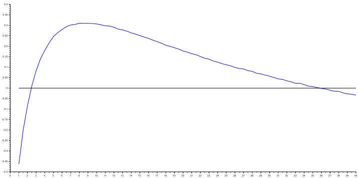
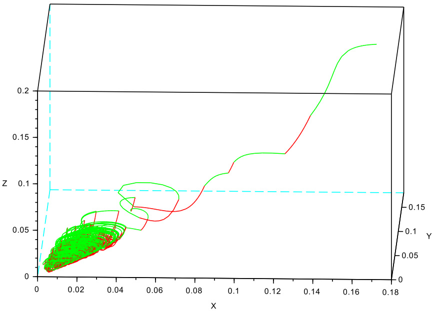


Figure: Simulation de Y_t pour $\beta = 10$ et simulation de $\Lambda(\beta)$



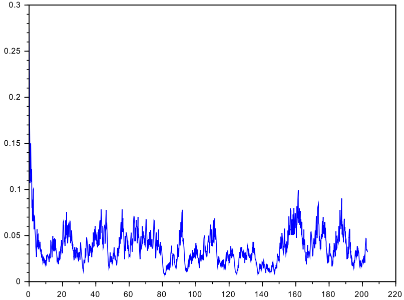


Figure: Simulation de X_t et de $\|X_t\|$ pour $\beta = 10$

Merci !