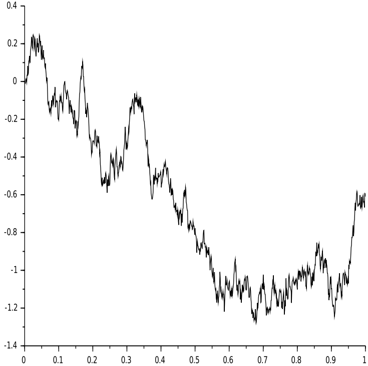
Processus localement Feller et applications aux processus de type Lévy

Tristan Haugomat
En collaboration avec Mihai Gradinaru

Journées de Probabilités 2017

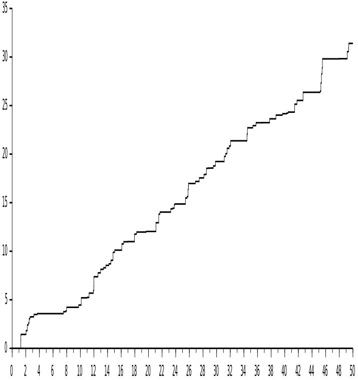
Un processus X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est de Lévy si X est cadlag, $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$,

$$\forall s \leq t, \quad X_t - X_s \perp\!\!\!\perp \sigma(X_u;\ u \leq s) \text{ et } X_t - X_s \sim X_{t-s}.$$



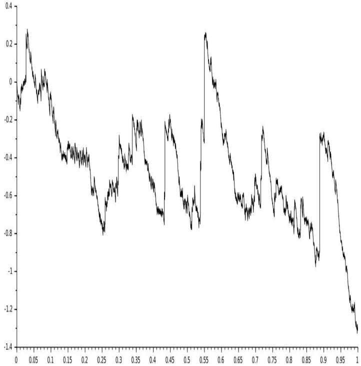
Un processus X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est de Lévy si X est cadlag, $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$,

$$\forall s \leq t, \quad X_t - X_s \perp\!\!\!\perp \sigma(X_u;\ u \leq s) \text{ et } X_t - X_s \sim X_{t-s}.$$



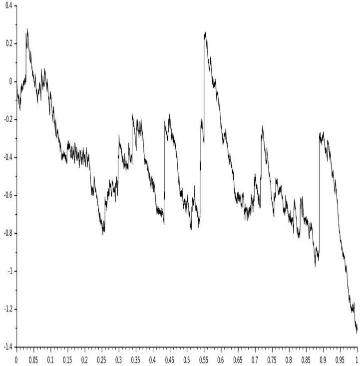
Un processus X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est de Lévy si X est cadlag, $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$,

$$\forall s \leq t, \quad X_t - X_s \perp\!\!\!\perp \sigma(X_u;\ u \leq s) \text{ et } X_t - X_s \sim X_{t-s}.$$



Un processus X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est de Lévy si X est cadlag, $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$,

$$\forall s \leq t, \quad X_t - X_s \perp\!\!\!\perp \sigma(X_u;\ u \leq s) \text{ et } X_t - X_s \sim X_{t-s}.$$



Il existe (triplet de Lévy)

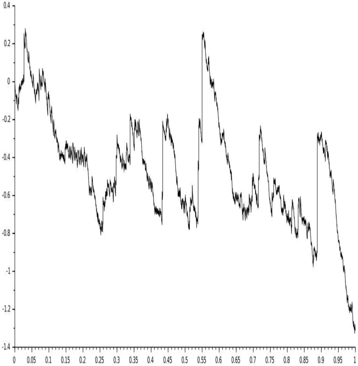
- une dérive $b \in \mathbb{R}^d$,
- une matrice de diffusion $a \in \mathbb{R}^{d \times d}$, symétrique positive,
- une mesure de saut ν sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ telle que

$$\int (|y|^2 \wedge 1)\nu(\mathrm{d}y) < \infty$$

Processus de Lévy

Un processus X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est de Lévy si X est cadlag, $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$,

$$\forall s \leq t, \quad X_t - X_s \perp\!\!\!\perp \sigma(X_u;\ u \leq s) \text{ et } X_t - X_s \sim X_{t-s}.$$



Il existe (triplet de Lévy)

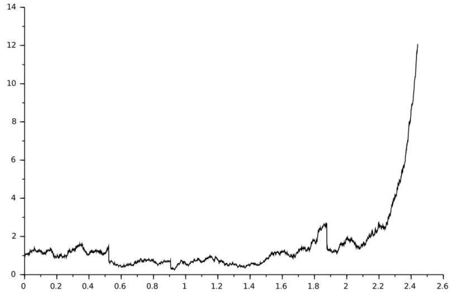
- une dérive $b \in \mathbb{R}^d$,
- une matrice de diffusion $a \in \mathbb{R}^{d \times d}$, symétrique positive,
- une mesure de saut ν sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ telle que

$$\int (|y|^2 \wedge 1)\nu(\mathrm{d}y) < \infty$$

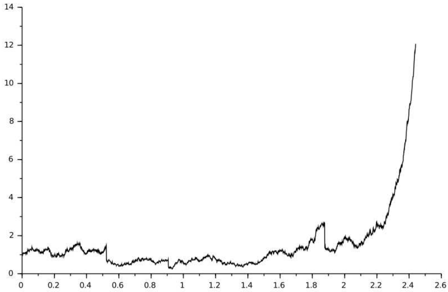
tels que $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi \cdot X_t}] = \mathrm{e}^{-t\psi(\xi)}$ avec

$$\psi(\xi) := -\mathrm{i}b \cdot \xi + \frac{1}{2}\xi \cdot a\xi + \int \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi \cdot y} + \frac{\mathrm{i}\xi \cdot y}{1 + |y|^2}\right)\nu(\mathrm{d}y)$$

Un processus de Markov (homogène en temps) est de type Lévy si au voisinage de tout point $x \in \mathbb{R}^d$ il se comporte comme un processus de Lévy



Un processus de Markov (homogène en temps) est de type Lévy si au voisinage de tout point $x \in \mathbb{R}^d$ il se comporte comme un processus de Lévy

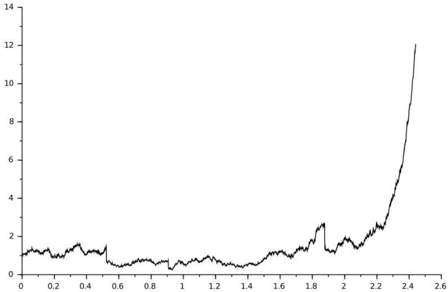


de triplet de Lévy :

- une dérive $b(x) \in \mathbb{R}^d$,
- une matrice de diffusion $a(x) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, symétrique positive,
- une mesure de saut $\nu(x)$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ telle que

$$\left(\int |y|^2 \wedge 1\right)\nu(x, \mathrm{d}y) < \infty$$

Un processus de Markov (homogène en temps) est de type Lévy si au voisinage de tout point $x \in \mathbb{R}^d$ il se comporte comme un processus de Lévy



de triplet de Lévy :

- une dérive $b(x) \in \mathbb{R}^d$,
- une matrice de diffusion $a(x) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, symétrique positive,
- une mesure de saut $\nu(x)$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ telle que

$$\left(\int |y|^2 \wedge 1\right)\nu(x, \mathrm{d}y) < \infty$$

On appelle symbole :

$$q(x,\xi) := -\mathrm{i}b(x)\cdot\xi + \frac{1}{2}\xi\cdot a(x)\xi + \int \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot y} + \frac{\mathrm{i}\xi\cdot y}{1+|y|^2}\right)\nu(x,\mathrm{d}y)$$
$$= \lim_{t\downarrow 0} \frac{1 - \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot X_t} \mid X_0 = x]}{t}$$

Processus de type Lévy : formellement

Pour un processus de Lévy de paramètres (b, a, ν), t.q. $\int \nu < \infty$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[f(X_h) - f(0)\big] \\
&\simeq \mathbb{E}\big[(f(X_h) - f(0))\mathbb{1}_{\{X \text{ saute avant } h\}}\big] \\
&+ \mathbb{E}\Big[(\nabla f(0) \cdot X_h + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \partial^2_{ij} f(0) X_h^i X_h^j)\mathbb{1}_{\{X \text{ ne saute pas avant } h\}}\Big]
\end{aligned}$$

Processus de type Lévy : formellement

Pour un processus de Lévy de paramètres (b, a, ν), t.q. $\int \nu < \infty$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[f(X_h) - f(0)\big] \\
&\simeq \mathbb{E}\big[(f(X_h) - f(0))\mathbb{1}_{\{X \text{ saute avant } h\}}\big] \\
&+ \mathbb{E}\Big[(\nabla f(0) \cdot X_h + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \partial^2_{ij} f(0) X^i_h X^j_h)\mathbb{1}_{\{X \text{ ne saute pas avant } h\}}\Big] \\
&\simeq \int (f(y) - f(0)) h\nu(\mathrm{d}y) + \nabla f(0) \cdot h \left(b - \int \frac{y}{1+|y|^2}\nu(\mathrm{d}y)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \partial^2_{ij} f(0) h a_{ij}
\end{aligned}$$

Pour un processus de Lévy de paramètres (b, a, ν), t.q. $\int \nu < \infty$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[f(X_h) - f(0)\big] \\
&\simeq \mathbb{E}\big[(f(X_h) - f(0))\mathbb{1}_{\{X \text{ saute avant } h\}}\big] \\
&+ \mathbb{E}\Big[(\nabla f(0) \cdot X_h + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \partial^2_{ij} f(0) X_h^i X_h^j)\mathbb{1}_{\{X \text{ ne saute pas avant } h\}}\Big] \\
&\simeq \int (f(y) - f(0)) h\nu(\mathrm{d}y) + \nabla f(0) \cdot h \left(b - \int \frac{y}{1+|y|^2}\nu(\mathrm{d}y)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \partial^2_{ij} f(0) h a_{ij} \\
&= h\left(\nabla f(0) \cdot b + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \partial^2_{ij} f(0) a_{ij} + \int \left(f(y) - f(0) - \frac{\nabla f(0) \cdot y}{1+|y|^2}\right)\nu(\mathrm{d}y)\right)
\end{aligned}$$

Processus de type Lévy : formellement

Pour un processus de Lévy de paramètres (b, a, ν), t.q. $\int \nu < \infty$

$$\mathbb{E}\big[f(X_h) - f(0)\big]$$
$$\simeq h\left(\nabla f(0)\cdot b + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\partial^2_{ij} f(0) a_{ij} + \int \left(f(y) - f(0) - \frac{\nabla f(0)\cdot y}{1+|y|^2}\right)\nu(\mathrm{d}y)\right)$$

Pour un processus de Lévy de paramètres (b, a, ν), t.q. $\int \nu < \infty$

$$\mathbb{E}\big[f(X_h) - f(0)\big]$$
$$\simeq h \left(\nabla f(0) \cdot b + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \partial^2_{ij} f(0) a_{ij} + \int \Big(f(y) - f(0) - \frac{\nabla f(0) \cdot y}{1 + |y|^2} \Big) \nu(\mathrm{d}y) \right)$$

Pour un processus de type Lévy de paramètres $(b(\cdot), a(\cdot), \nu(\cdot))$

$$\mathbb{E}\big[f(X_{t+h}) - f(X_t) \mid \mathcal{F}_t\big] \simeq hLf(X_t)$$

avec

$$Lf(x) := \nabla f(x) \cdot b(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \partial^2_{ij} f(x) a_{ij}(x) + \int \Big(f(x+y) - f(x) - \frac{\nabla f(x) \cdot y}{1 + |y|^2} \Big) \nu(x, \mathrm{d}y)$$

Pour un processus de Lévy de paramètres (b, a, ν), t.q. $\int \nu < \infty$

$$\mathbb{E}\big[f(X_h) - f(0)\big]$$

$$\simeq h\left(\nabla f(0)\cdot b + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\partial^2_{ij} f(0) a_{ij} + \int \left(f(y) - f(0) - \frac{\nabla f(0)\cdot y}{1+|y|^2}\right)\nu(\mathrm{d}y)\right)$$

Pour un processus de type Lévy de paramètres $(b(\cdot), a(\cdot), \nu(\cdot))$

$$\mathbb{E}\big[f(X_{t+h}) - f(X_t) \mid \mathcal{F}_t\big] \simeq hLf(X_t)$$

avec

$$Lf(x) := \nabla f(x)\cdot b(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\partial^2_{ij} f(x) a_{ij}(x) + \int \left(f(x+y) - f(x) - \frac{\nabla f(x)\cdot y}{1+|y|^2}\right)\nu(x, \mathrm{d}y)$$

$$= -\mathrm{Fourier}^{-1}\left(\xi \mapsto q(x,\xi)\widehat{f}(\xi)\right)(x) = -q(x,\nabla) f(x)$$

Pour un processus de Lévy de paramètres (b, a, ν), t.q. $\int \nu < \infty$

$$\mathbb{E}\big[f(X_h) - f(0)\big]$$
$$\simeq h\left(\nabla f(0)\cdot b + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\partial^2_{ij}f(0)a_{ij} + \int \Big(f(y) - f(0) - \frac{\nabla f(0)\cdot y}{1+|y|^2}\Big)\nu(\mathrm{d}y)\right)$$

Pour un processus de type Lévy de paramètres $(b(\cdot), a(\cdot), \nu(\cdot))$

$$\mathbb{E}\big[f(X_{t+h}) - f(X_t) \mid \mathcal{F}_t\big] \simeq hLf(X_t)$$

avec

$$Lf(x) := \nabla f(x)\cdot b(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\partial^2_{ij}f(x)a_{ij}(x) + \int \Big(f(x+y) - f(x) - \frac{\nabla f(x)\cdot y}{1+|y|^2}\Big)\nu(x,\mathrm{d}y)$$

$$= -\mathrm{Fourier}^{-1}\Big(\xi \mapsto q(x,\xi)\widehat{f}(\xi)\Big)(x) = -q(x,\nabla)f(x)$$

Ainsi $f(X_t) - \int_0^t Lf(X_s)\mathrm{d}s$ "devrait" être une martingale.

Espace d'états

On se place sur un espace d'état S localement compact à base dénombrable. Soit $\Delta \notin S$, on munit $S^\Delta := S \cup \{\Delta\}$ d'une topologie telle que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \Delta \quad \text{s.s.i.} \quad \forall K \subset S \text{ compact}, \ \exists n_0, \ \forall n \geq n_0, \quad x_n \notin K.$$

Espace d'états

On se place sur un espace d'état S localement compact à base dénombrable. Soit $\Delta \notin S$, on munit $S^\Delta := S \cup \{\Delta\}$ d'une topologie telle que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \Delta \quad \text{s.s.i.} \quad \forall K \subset S \text{ compact},\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0, \quad x_n \notin K.$$

Espaces de fonctions

On note

$$\mathrm{C}(S) := \{\text{fonctions continues de } S \text{ dans } \mathbb{R}\}$$
$$\mathrm{C}_0(S) := \left\{ f \in \mathrm{C}(S) \;\middle|\; \lim_{x\to\Delta} f(x) = 0 \right\}.$$

Espace d'états

On se place sur un espace d'état S localement compact à base dénombrable. Soit $\Delta \notin S$, on munit $S^\Delta := S \cup \{\Delta\}$ d'une topologie telle que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \Delta \quad \text{s.s.i.} \quad \forall K \subset S \text{ compact}, \ \exists n_0, \ \forall n \geq n_0, \quad x_n \notin K.$$

Espaces de fonctions

On note

$$\mathrm{C}(S) := \{\text{fonctions continues de } S \text{ dans } \mathbb{R}\}$$
$$\mathrm{C}_0(S) := \left\{ f \in \mathrm{C}(S) \;\middle|\; \lim_{x\to\Delta} f(x) = 0 \right\}.$$

Espace de trajectoires

On travaille sur l'espace canonique

$$\mathbb{D}_{\mathrm{exp}}(S) := \left\{ \omega : \mathbb{R}_+ \to S^\Delta \;\middle|\; \omega \text{ est cadlag et constant après avoir atteint } \Delta \right\}$$

Soit un opérateur linéaire

$$L : \mathrm{D}(L) \to \mathrm{C}(S)$$

de domaine $\mathrm{D}(L)$ un s.e.v. dense de $\mathrm{C}_0(S)$.

Définition (Problème de martingale)

L'ensemble $\mathcal{M}(L)$ des solutions du problème de martingale est l'ensemble des probabilités $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(\mathbb{D}_{\mathrm{exp}}(S))$ t.q. pour tous ouvert relativement compact U de S et $f \in \mathrm{D}(L)$

$$f(X_{t\wedge\tau^U}) - \int_0^{t\wedge\tau^U} Lf(X_s)\mathrm{d}s \text{ est une } \mathbb{P}\text{-martingale.}$$

Ici

$$\tau^U := \inf\left\{t \geq 0 \mid X_{t-} \notin U \text{ ou } X_t \notin U\right\}.$$

Définition (Problème de martingale)

L'ensemble $\mathcal{M}(L)$ des solutions du problème de martingale est l'ensemble des probabilités $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(\mathbb{D}_{\exp}(S))$ t.q. pour tous ouvert relativement compact U de S et $f \in \mathrm{D}(L)$

$$f(X_{t\wedge\tau^U}) - \int_0^{t\wedge\tau^U} Lf(X_s)\mathrm{d}s \text{ est une } \mathbb{P}\text{-martingale.}$$

Ici

$$\tau^U := \inf\{t \geq 0 \mid X_{t-} \notin U \text{ ou } X_t \notin U\}.$$

Proposition

On a équivalence entre

- (Existence) Pour tout $x \in S$, il existe $\mathbb{P} \in \mathcal{M}(L)$ t.q. $\mathbb{P}(X_0 = x) = 1$.
- (Principe du maximum positif) pour tous $f \in \mathrm{D}(L)$ et $x \in S$ t.q. $f(x) = \sup f \geq 0$, on a $Lf(x) \leq 0$.

Théorème 1

Soit $(\mathbb{P}_x)_x \in \mathcal{P}(\mathbb{D}_{\exp}(S))^S$. On a équivalence entre

- (Problème de martingale bien posé) Il existe L tel que

$$\forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}(\mathbb{D}_{\exp}(S)), \quad \mathbb{P} \in \mathcal{M}(L) \text{ et } \mathbb{P}(X_0 = x) \Leftrightarrow \mathbb{P} = \mathbb{P}_x.$$

Théorème 1

Soit $(\mathbb{P}_x)_x \in \mathcal{P}(\mathbb{D}_{\exp}(S))^S$. On a équivalence entre

- (Problème de martingale bien posé) Il existe L tel que

$$\forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}(\mathbb{D}_{\exp}(S)), \quad \mathbb{P} \in \mathcal{M}(L) \text{ et } \mathbb{P}(X_0 = x) \Leftrightarrow \mathbb{P} = \mathbb{P}_x.$$

- (continuité) $(\mathbb{P}_x)_x$ est de Markov et la fonction $x \mapsto \mathbb{P}_x$ est continue pour la topologie de Skorokhod Localisée en espace.

Théorème 1

Soit $(\mathbb{P}_x)_x \in \mathcal{P}(\mathbb{D}_{\text{exp}}(S))^S$. On a équivalence entre

- (Problème de martingale bien posé) Il existe L tel que

$$\forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}(\mathbb{D}_{\text{exp}}(S)), \quad \mathbb{P} \in \mathcal{M}(L) \text{ et } \mathbb{P}(X_0 = x) \Leftrightarrow \mathbb{P} = \mathbb{P}_x.$$

- (continuité) $(\mathbb{P}_x)_x$ est de Markov et la fonction $x \mapsto \mathbb{P}_x$ est continue pour la topologie de Skorokhod Localisée en espace.

- (Propriété de Feller localisée en espace) Pour tout ouvert relativement compact U de S

$$\forall x \in S, \quad \mathcal{L}_{\mathbb{P}_x}\left(X^{\tau^U}\right) = \mathcal{L}_{\widetilde{\mathbb{P}}_x}\left(X^{\tau^U}\right),$$

  où $(\widetilde{\mathbb{P}}_x)_x$ est Feller.

Une famille $(\mathbb{P}_x)_x$ markovienne est Feller si

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \forall f \in \mathrm{C}_0(S), \quad \text{la fonction } x \mapsto \mathbb{E}_x f(X_t) \text{ est dans } \mathrm{C}_0(S).$$

Théorème 1

Soit $(\mathbb{P}_x)_x \in \mathcal{P}(\mathbb{D}_{\exp}(S))^S$. On a équivalence entre

- (Problème de martingale bien posé) Il existe L tel que

$$\forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}(\mathbb{D}_{\exp}(S)), \quad \mathbb{P} \in \mathcal{M}(L) \text{ et } \mathbb{P}(X_0 = x) \Leftrightarrow \mathbb{P} = \mathbb{P}_x.$$

- (continuité) $(\mathbb{P}_x)_x$ est de Markov et la fonction $x \mapsto \mathbb{P}_x$ est continue pour la topologie de Skorokhod Localisée en espace.

- (Propriété de Feller localisée en espace) Pour tout ouvert relativement compact U de S

$$\forall x \in S, \quad \mathcal{L}_{\mathbb{P}_x}\left(X^{\tau^U}\right) = \mathcal{L}_{\widetilde{\mathbb{P}}_x}\left(X^{\tau^U}\right),$$

  où $(\widetilde{\mathbb{P}}_x)_x$ est Feller.

Une famille $(\mathbb{P}_x)_x$ markovienne est Feller si

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ \forall f \in \mathrm{C}_0(S), \quad \text{la fonction } x \mapsto \mathbb{E}_x f(X_t) \text{ est dans } \mathrm{C}_0(S).$$

Dans ce cas $(\mathbf{P}_x)_x$ est $(\mathcal{F}_{t+})_t$-fortement markovienne et $(\mathcal{F}_{t+})_t$-quasi-continue.

On considère l'opérateur de type Lévy : $\forall f \in \mathrm{D}(L) := \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$Lf(x) := \nabla f(x) \cdot b(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \partial_{ij}^2 f(x) a_{ij}(x) + \int \Big(f(x+y) - f(x) - \frac{\nabla f(x) \cdot y}{1+|y|^2} \Big) \nu(x, \mathrm{d}y)$$

On considère l'opérateur de type Lévy : $\forall f \in \mathrm{D}(L) := \mathrm{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$

$$Lf(x) := \nabla f(x) \cdot b(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \partial_{ij}^2 f(x) a_{ij}(x) + \int \Big(f(x+y) - f(x) - \frac{\nabla f(x) \cdot y}{1+|y|^2} \Big) \nu(x, \mathrm{d}y)$$

Il y a existence pour le problème de martingale car L satisfait le p.m.p.

On considère l'opérateur de type Lévy : $\forall f \in \mathrm{D}(L) := \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$Lf(x) := \nabla f(x)\cdot b(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \partial_{ij}^2 f(x) a_{ij}(x) + \int \left(f(x+y) - f(x) - \frac{\nabla f(x)\cdot y}{1+|y|^2}\right)\nu(x,\mathrm{d}y)$$

Il y a existence pour le problème de martingale car L satisfait le p.m.p.

Proposition

On a $Lf \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d)$ pour toute $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ s.s.i. les fonctions

$$x \mapsto b(x),$$

$$x \mapsto \int f(y)\nu(x,\mathrm{d}y),$$

$$x \mapsto a_{ij}(x) + \int \frac{y_i y_j}{(1+|y|^2)^2}\nu(x,\mathrm{d}y)$$

sont continues pour tous i,j et $f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d\setminus\{0\})$.

On considère l'opérateur de type Lévy : $\forall f \in \mathrm{D}(L) := \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$Lf(x) := \nabla f(x)\cdot b(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \partial_{ij}^2 f(x) a_{ij}(x) + \int \left(f(x+y) - f(x) - \frac{\nabla f(x)\cdot y}{1+|y|^2} \right) \nu(x, \mathrm{d}y)$$

Il y a existence pour le problème de martingale car L satisfait le p.m.p.

Proposition

On a $Lf \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d)$ pour toute $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ s.s.i. les fonctions

$$x \mapsto b(x),$$

$$x \mapsto \int f(y)\nu(x, \mathrm{d}y),$$

$$x \mapsto a_{ij}(x) + \int \frac{y_i y_j}{(1+|y|^2)^2} \nu(x, \mathrm{d}y)$$

sont continues pour tous i, j et $f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$.

Pour l'unicité, il y a des résultats :

- dans le cas des diffusions (Stroock et Varadhan),
- équivalence avec EDS et équation d'évolution (Kurtz),
- EDS à coefficients Lipschitziens,
- matrices $a(x)$ uniformément définies positives (Stroock),
- etc (voir Lévy Matters III : Böttcher, Schilling et Wang).

On prend des opérateurs densément définis $L_n : \mathrm{C}_0(S) \supset \mathrm{D}(L_n) \to \mathrm{C}(S)$ et $L : \mathrm{C}_0(S) \supset \mathrm{D}(L) \to \mathrm{C}(S)$. On suppose que les problèmes de martingale sont bien posés (et $\overline{L_n}$ générateurs) et on note $\mathbb{P}_x^n$ et $\mathbb{P}_x$ les solutions partant de x.

On prend des opérateurs densément définis $L_n : \mathrm{C}_0(S) \supset \mathrm{D}(L_n) \to \mathrm{C}(S)$ et $L : \mathrm{C}_0(S) \supset \mathrm{D}(L) \to \mathrm{C}(S)$. On suppose que les problèmes de martingale sont bien posés (et $\overline{L_n}$ générateurs) et on note $\mathbb{P}_x^n$ et $\mathbb{P}_x$ les solutions partant de x.

Théorème 2

Lorsque $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, $\mathbb{P}_{x_n}^n$ converge étroitement vers $\mathbb{P}_x$ pour la topologie de Skorokhod local, s.s.i.

$$\forall f \in \mathrm{D}(L),\ \exists \text{ une suite } f_n \in \mathrm{D}(L_n), \quad f_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{unif.}}{\longrightarrow}} f \text{ et } Lf_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{unif. comp.}}{\longrightarrow}} Lf.$$

Soit L_n et L les opérateurs de type-Lévy associés à $(b_n(\cdot), a_n(\cdot), \nu_n(\cdot))$ et $(b(\cdot), a(\cdot), \nu(\cdot))$.

Proposition

Supposons que $Lf \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d)$ pour toute $f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\forall f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d), \quad L_n f \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif. comp.}} Lf$$

s.s.i.

Soit L_n et L les opérateurs de type-Lévy associés à $(b_n(\cdot), a_n(\cdot), \nu_n(\cdot))$ et $(b(\cdot), a(\cdot), \nu(\cdot))$.

Proposition

Supposons que $Lf \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d)$ pour toute $f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\forall f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d), \quad L_n f \underset{n\to\infty}{\overset{\text{unif. comp.}}{\longrightarrow}} Lf$$

s.s.i. pour tous i, j et $f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$,

$$b_n(\cdot) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{unif. comp.}}{\longrightarrow}} b(\cdot),$$

$$\int f(y)\nu_n(\cdot, \mathrm{d}y) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{unif. comp.}}{\longrightarrow}} \int f(y)\nu(\cdot, \mathrm{d}y),$$

$$a_{n,ij}(\cdot) + \int \tfrac{y_i y_j}{(1+|y|^2)^2}\nu_n(\cdot, \mathrm{d}y) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{unif. comp.}}{\longrightarrow}} a_{ij}(\cdot) + \int \tfrac{y_i y_j}{(1+|y|^2)^2}\nu(\cdot, \mathrm{d}y)$$

Convergence des processus de type Lévy

Soit L_n et L les opérateurs de type-Lévy associés à $(b_n(\cdot), a_n(\cdot), \nu_n(\cdot))$ et $(b(\cdot), a(\cdot), \nu(\cdot))$.

Proposition

Supposons que $Lf \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d)$ pour toute $f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\forall f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d), \quad L_n f \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif. comp.}} Lf$$

s.s.i. pour tous i, j et $f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$,

$$b_n(\cdot) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif. comp.}} b(\cdot),$$

$$\int f(y)\nu_n(\cdot, \mathrm{d}y) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif. comp.}} \int f(y)\nu(\cdot, \mathrm{d}y),$$

$$a_{n,ij}(\cdot) + \int \frac{y_i y_j}{(1+|y|^2)^2}\nu_n(\cdot, \mathrm{d}y) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif. comp.}} a_{ij}(\cdot) + \int \frac{y_i y_j}{(1+|y|^2)^2}\nu(\cdot, \mathrm{d}y)$$

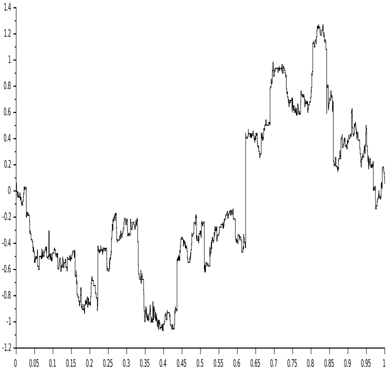


Figure: $b = 0$, $a = 0$ et $\nu(x, \mathrm{d}y) = |y|^{-1-3/2}\mathrm{d}y$

- Soit un opérateur densément définie $L : \mathrm{C}_0(S) \supset \mathrm{D}(L) \to \mathrm{C}(S)$. On suppose que le problème de martingale est bien posé et on note $\mathbb{P}_x$ la solution partant de x.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $(Y^n_k)_k$ un processus de Markov sur S à temps discret (variable k). On suppose que pour tout n

$$\text{la fonction} \quad x \mapsto \mathcal{L}\left(Y^n_1 \mid Y^n_0 = x\right) \quad \text{est continue.}$$

- Soit un opérateur densément définie $L : \mathrm{C}_0(S) \supset \mathrm{D}(L) \to \mathrm{C}(S)$. On suppose que le problème de martingale est bien posé et on note $\mathbb{P}_x$ la solution partant de x.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $(Y^n_k)_k$ un processus de Markov sur S à temps discret (variable k). On suppose que pour tout n

$$\text{la fonction} \quad x \mapsto \mathcal{L}\left(Y^n_1 \mid Y^n_0 = x\right) \quad \text{est continue.}$$

Théorème 3

On a équivalence entre

$$\forall x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x, \qquad \mathcal{L}\left(\left(Y^n_{\lfloor t/n \rfloor}\right)_t \;\middle|\; Y^n_0 = x_n\right) \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\text{Sko. loc.}}} \mathbb{P}_x$$

et

$$\forall f \in \mathrm{D}(L),\ \exists \text{ une suite } f_n \in \mathrm{C}_0(S), \quad f_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\text{unif.}}} f \text{ et } Lf_n \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{\text{unif. comp.}}} Lf,$$

où $L_n f(x) := n\left(\mathbb{E}\left[f(Y^n_1) \mid Y_0 = x\right] - f(x)\right)$.

- Soit L un opérateur de type Lévy associé à $(b(\cdot), a(\cdot), \nu(\cdot))$.
- Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^d$, soit $\mu_n(x)$ une mesure de proba sur $\mathbb{R}^d$. On définit $L_n f(x) := n(\int f(y)\mu_n(x, \mathrm{d}y) - f(x))$.

Proposition

Supposons que $Lf \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d)$ pour toute $f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\forall f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d), \quad L_n f \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif. comp.}} Lf$$

s.s.i.

- Soit L un opérateur de type Lévy associé à $(b(\cdot), a(\cdot), \nu(\cdot))$.
- Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^d$, soit $\mu_n(x)$ une mesure de proba sur $\mathbb{R}^d$. On définit $L_n f(x) := n(\int f(y)\mu_n(x, \mathrm{d}y) - f(x))$.

Proposition

Supposons que $Lf \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d)$ pour toute $f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\forall f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d), \quad L_n f \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif. comp.}} Lf$$

s.s.i. pour tous i, j et $f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$,

$$n \int \frac{y - x}{1 + (y - x)^2} \mu_n(x, \mathrm{d}y) \xrightarrow[n\to\infty]{} b(x),$$

$$n \int f(y - x)\mu_n(x, \mathrm{d}y) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f(y)\nu(x, \mathrm{d}y),$$

$$n \int \frac{(y_i - x_i)(y_j - x_j)}{(1 + |y - x|^2)^2} \mu_n(x, \mathrm{d}y) \xrightarrow[n\to\infty]{} a_{ij}(x) + \int \frac{y_i y_j}{(1 + |y|^2)^2} \nu(x, \mathrm{d}y),$$

uniformément en x sur les compact de $\mathbb{R}^d$.

Soit L un opérateur de type Lévy de triplet $(0, 0, \nu(\cdot))$ avec

$$\nu(x, \mathrm{d}y) := c(x)|y|^{-d-\alpha(x)}\mathrm{d}y, \quad \text{où } c \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*), \ \alpha \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d, (0, 1)).$$

Soit L un opérateur de type Lévy de triplet $(0, 0, \nu(\cdot))$ avec

$$\nu(x, \mathrm{d}y) := c(x)|y|^{-d-\alpha(x)}\mathrm{d}y, \quad \text{où } c \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*),\ \alpha \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d, (0, 1)).$$

On pose

$$\mu_n(x, \mathrm{d}y) := \frac{c(x)}{n}|y - x|^{-d-\alpha(x)}\mathbb{1}_{|y-x|\geq\varepsilon_n(x)}\mathrm{d}y,$$

Soit L un opérateur de type Lévy de triplet $(0,0,\nu(\cdot))$ avec

$$\nu(x,\mathrm{d}y) := c(x)|y|^{-d-\alpha(x)}\mathrm{d}y, \quad \text{où } c \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}_+^*),\ \alpha \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d,(0,1)).$$

On pose

$$\mu_n(x,\mathrm{d}y) := \frac{c(x)}{n}|y-x|^{-d-\alpha(x)}\mathbb{1}_{|y-x|\geq\varepsilon_n(x)}\mathrm{d}y, \quad \varepsilon_n(x) := \left(\frac{c(x)\text{mesure}(\mathbb{S}^{d-1})}{n\alpha(x)}\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}$$

Soit L un opérateur de type Lévy de triplet $(0, 0, \nu(\cdot))$ avec

$$\nu(x, \mathrm{d}y) := c(x)|y|^{-d-\alpha(x)}\mathrm{d}y, \quad \text{où } c \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*),\ \alpha \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d, (0,1)).$$

On pose

$$\mu_n(x, \mathrm{d}y) := \frac{c(x)}{n}|y-x|^{-d-\alpha(x)}\mathbb{1}_{|y-x|\geq\varepsilon_n(x)}\mathrm{d}y, \quad \varepsilon_n(x) := \left(\frac{c(x)\text{mesure}(\mathbb{S}^{d-1})}{n\alpha(x)}\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}$$

$$\sim x + Q\left(\frac{c(x)\text{mesure}(\mathbb{S}^{d-1})}{n\alpha(x)U}\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}} \quad \text{où } Q \sim \mathcal{U}(\mathbb{S}^{d-1}),\ U \sim \mathcal{U}([0,1]).$$

Soit L un opérateur de type Lévy de triplet $(0, 0, \nu(\cdot))$ avec

$$\nu(x, \mathrm{d}y) := c(x)|y|^{-d-\alpha(x)}\mathrm{d}y, \quad \text{où } c \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+^*),\ \alpha \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d, (0,1)).$$

On pose

$$\mu_n(x, \mathrm{d}y) := \frac{c(x)}{n}|y-x|^{-d-\alpha(x)}\mathbb{1}_{|y-x|\geq\varepsilon_n(x)}\mathrm{d}y, \quad \varepsilon_n(x) := \left(\frac{c(x)\text{mesure}(\mathbb{S}^{d-1})}{n\alpha(x)}\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}$$

$$\sim x + Q\left(\frac{c(x)\text{mesure}(\mathbb{S}^{d-1})}{n\alpha(x)U}\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}} \quad \text{où } Q \sim \mathcal{U}(\mathbb{S}^{d-1}),\ U \sim \mathcal{U}([0,1]).$$

On prend $(Q_k)_k$ et $(U_k)_k$ i.i.d. de lois $\mathcal{U}(\mathbb{S}^{d-1})$ et $\mathcal{U}([0,1])$. On définit

$$Y_{k+1}^n := Y_k^n + Q_k\left(\frac{c(Y_k^n)\text{mesure}(\mathbb{S}^{d-1})}{n\alpha(Y_k^n)U_k}\right)^{\frac{1}{\alpha(Y_k^n)}}.$$

Soit L un opérateur de type Lévy de symbole $q(x,\xi)$. Soit $\mu_n(x)$ de fonction caractéristique

$$\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot\xi}\mu_n(x,\mathrm{d}y) := \mathrm{e}^{-q(x,\xi)/n}.$$

Proposition (Méthode d'Euler avec incréments Lévy)

Supposons que $Lf \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d)$ pour toute $f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\forall f \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^d), \quad L_n f \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif. comp.}} Lf$$

où $L_n f(x) := n\left(\int f(y)\mathrm{d}\mu_n(x,\mathrm{d}y) - f(x)\right)$.

Diffusion réel dans un potentiel

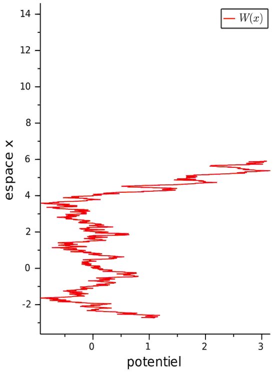
Soit $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable tel que $\mathrm{e}^{|V|} \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$, on pose

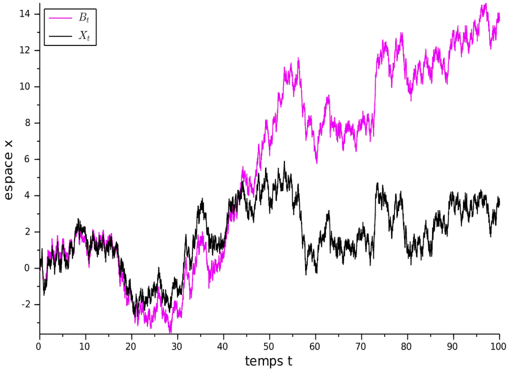
$$L := \frac{1}{2}\mathrm{e}^{V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \qquad ,$$

Soit $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable tel que $\mathrm{e}^{|V|} \in \mathrm{L}^1_{\text{loc}}$, on pose

$$L := \frac{1}{2}\mathrm{e}^{V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \overset{\text{Formel.}}{=} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \frac{1}{2}V'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},$$

donc la solution formelle de $\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}B_t - \frac{1}{2}V'(X_t)\mathrm{d}t$.

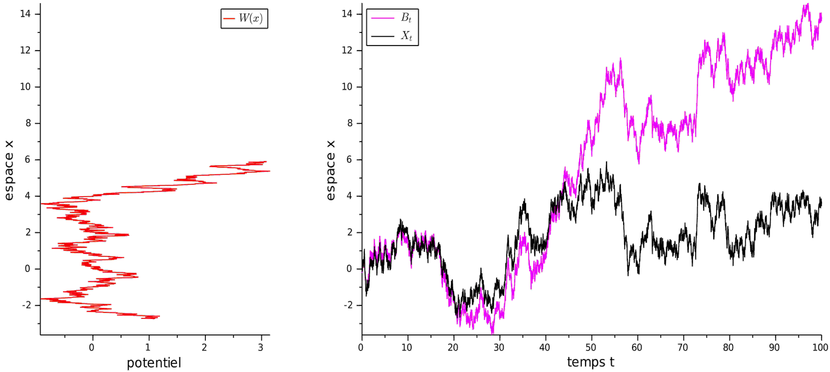




Soit $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable tel que $e^{|V|} \in L^1_{loc}$, on pose

$$L := \frac{1}{2} e^{V} \frac{d}{dx} e^{-V} \frac{d}{dx} \overset{\text{Formel.}}{=} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{2} V' \frac{d}{dx},$$

donc la solution formelle de $dX_t = dB_t - \frac{1}{2} V'(X_t) dt$.



- Le problème de martingale est bien posé.
- Les solutions dépendent continument de V.

Pour tout $(n, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ on prend $q_{n,\ell} \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la chaîne de Markov $(Y_k^n)_k$ sur $\mathbb{Z}$ par

$$\mathbb{P}\left(Y_1^n = \ell + 1 \mid Y_0^n = \ell\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Y_1^n = \ell - 1 \mid Y_0^n = \ell\right) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{q_{n,\ell}}}.$$

Pour tout $(n,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ on prend $q_{n,\ell} \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la chaîne de Markov $(Y_k^n)_k$ sur $\mathbb{Z}$ par

$$\mathbb{P}\left(Y_1^n = \ell+1 \mid Y_0^n = \ell\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Y_1^n = \ell-1 \mid Y_0^n = \ell\right) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{q_{n,\ell}}}.$$

On définit le potentiel

$$V_n(x) := \sum_{\ell=1}^{\lfloor xn \rfloor} q_{n,\ell} \mathbb{1}_{x \geq 1/n} - \sum_{\ell=0}^{-\lfloor xn \rfloor - 1} q_{n,-\ell} \mathbb{1}_{x<0}.$$

Pour tout $(n,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ on prend $q_{n,\ell} \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la chaîne de Markov $(Y^n_k)_k$ sur $\mathbb{Z}$ par

$$\mathbb{P}\left(Y^n_1 = \ell + 1 \mid Y^n_0 = \ell\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Y^n_1 = \ell - 1 \mid Y^n_0 = \ell\right) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{q_{n,\ell}}}.$$

On définit le potentiel

$$V_n(x) := \sum_{\ell=1}^{\lfloor xn \rfloor} q_{n,\ell} \mathbb{1}_{x \geq 1/n} - \sum_{\ell=0}^{-\lfloor xn \rfloor - 1} q_{n,-\ell} \mathbb{1}_{x<0}.$$

Corollaire

Si V_n converge vers V, alors la loi de

$$(n^{-1} Y^n_{\lfloor tn^2 \rfloor})_t$$

converge vers la solution du problème de martingale associé à $\frac{1}{2} \mathrm{e}^V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^{-V} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

Merci pour votre attention !