Journées de Probabilités, AUSSOIS 2017

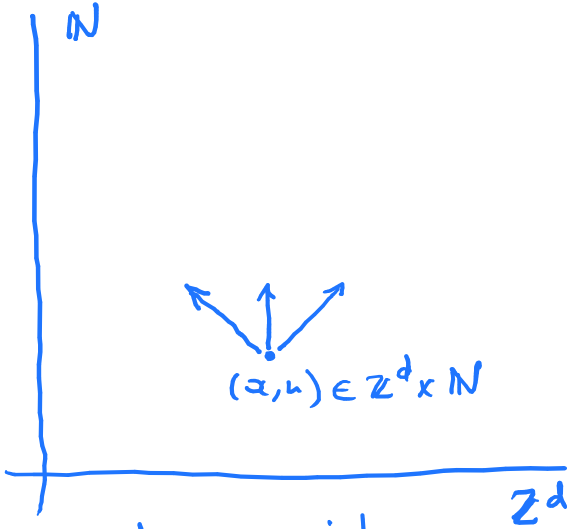
Nombre de chemins ouverts en percolation orientée

Régine MARCHAND (IECL, Nancy)
Olivier GARET (IECL, Nancy)
Jean-Baptiste GOUÉRÉ (LMPT, Tours)

1 Le modèle : percolation orientée

- $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$, arêtes orientées
- p : paramètre d'ouverture des arêtes

$\{0 \to \infty\}$ = il existe un chemin infini d'arêtes ouvertes issu de 0.



chaque point a $(2d+1)$ voisins

seuil de percolation : $p_c(d+1) \in]0,1[$

on fixe $p > p_c(d+1)$

$$\boxed{\mathbb{P}_p(0 \longrightarrow \infty) > 0}$$

On veut compter le nombre de chemins ouverts de longueur n, issus de 0.

$(x,n) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$

$$\left[\begin{array}{l} N_{x,n} = \text{nb de chemins ouverts de } (0,0) \text{ à } (x,n) \\ N_n = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} N_{x,n} \end{array}\right.$$

On cherche un comportement asymptotique :

on va travailler conditionnellement à $\{0 \to \infty\}$

$$\boxed{\overline{\mathbb{P}_p}(\cdot) = \mathbb{P}_p(\cdot \mid 0 \to \infty)}$$

② Sans conditionner, c'est facile :

$$\mathbb{E}_p(N_n) = \mathbb{E}_p\Big(\sum_{\gamma : (0,0) \to \mathbb{Z}^d \times \{n\}} \mathbb{1}_{\gamma \text{ ouvert}}\Big)$$

$$= \sum_{\gamma :} \mathbb{P}_p(\gamma \text{ ouvert})$$

$$= (2d+1)^n p^n$$

donc $\underline{\frac{1}{n} \log \mathbb{E}_p(N_n) = \log\big[(2d+1)p\big]}$

On a plus : $\left(\frac{N_n}{[(2d+1)p]^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale positive [Darling 91]

donc $\exists$ une v.a. $W \geq 0$ tq $\frac{N_n}{[(2d+1)p]^n} \xrightarrow[p.s]{} W$.

donc sur $\{W>0\}$ $\frac{1}{n}\log N_n \xrightarrow[p.s]{} \log[(2d+1)p]$

Mais quand a-t-on $\{W>0\}$?

- il est possible d'avoir $\mathbb{P}_p(0\to\infty)>0$ et $\mathbb{P}_p(W=0)=1$
  par exemple, dim $d=1$ ou 2 [Yoshida 08]

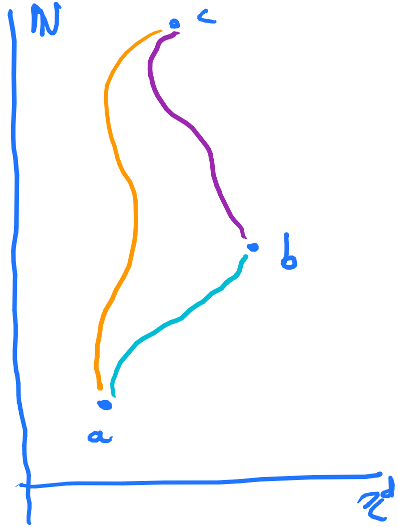
- il est possible d'avoir $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{1}{n}\log N_n \underset{<}{=} \log[(2d+1)p]$
  et
  pour différentes valeurs de p [spread out, grande dim
  Lacoin 12]

On voudrait un résultat de convergence pour $\frac{1}{n} \log N_n$ sans faire appel à w.

③ <u>Sur-multiplicativité :</u> $a,b,c \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$ $\quad N_{a\to c} \geq N_{a\to b} N_{b\to c}$

donc $(-\log N_{a\to c}) \leq (-\log N_{a\to b}) + (-\log N_{b,c})$

<u>propriété de sous-additivité</u>



<u>Rappel :</u>

- $u_{n+p} \leq u_n + u_p \quad \forall\, n,p$

  alors $\quad \frac{u_n}{n} \longrightarrow \inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{u_k}{k}$.

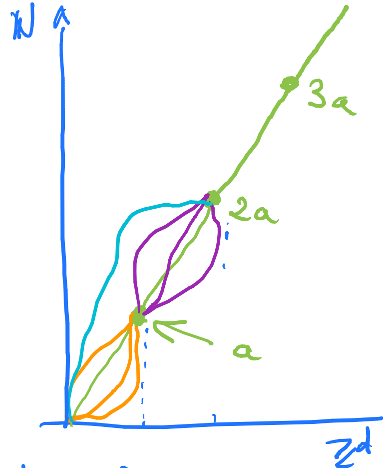
- Théorème ergodique sous-additif : version probabiliste de ce résultat.

Théorème ergodique sous-additif de Kingman

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\quad T : \Omega \to \Omega$ laissant $\mathbb{P}$ invariante, T ergodique
- $g_n : \Omega \to \mathbb{R}$, L^1, avec

$$\forall \omega \in \Omega \quad \forall n,p \in \mathbb{N} \qquad g_{n+p}(\omega) \leq g_n(\omega) + g_p(T^n \omega)$$

Alors $\mathbb{P}$ p.s $\quad \dfrac{g_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \inf_p \dfrac{\mathbb{E} g_p}{p}$



Ici, on fixe $a \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$

$$-\log N_{(n+p)a} \leq -\log N_{na} - \log N_{pa} \circ \theta_{na}$$

On pose $\quad g_n = -\log N_{na}$

$T =$ translation de vecteur a, ergodique

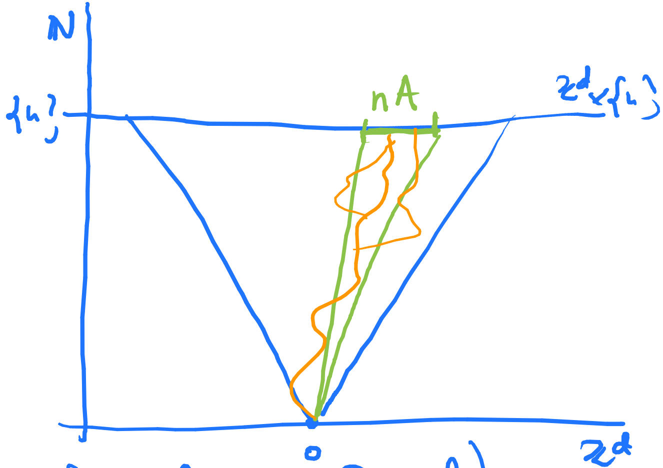
<u>Mais</u> $\quad \mathbb{P}_p(N_{na} = 0) > 0 \Rightarrow -\log N_{na}$ non intégrable.

4 Théorème [GARET - GOUÉRÉ - MARCHAND, à paraître]

1. $\frac{1}{n}\log N_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \tilde{\alpha}_0 \quad \overline{\mathbb{P}}_p$ p.s

2. $\exists\ \tilde{\alpha}_p$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} N_{nA,n} = \sup_{x\in A} \tilde{\alpha}(x) \quad \overline{\mathbb{P}}_p \text{ p.s.}$$



Remarques : • $p=1$: tous les chemins sont ouverts $N_{x,k+1} = \sum_{y\sim x} N_{y,k}$ ($\sim$ triangle de Pascal)

• percolation orientée : on coupe certains liens :

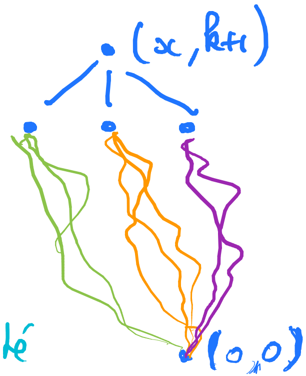
$$N_{x,k+1} = \sum_{y\sim x} \varepsilon^{k+1}_{y,x} N_{y,k}$$

v.a. i. id Ber(p)

• LSE [Yoshida 08]

$$N_{x,k+1} = \sum_{y\sim x} A^{k+1}_{y,x} N_{y,k}$$

v.a.i.id ≥ 0 + intégrabilité



2 grandes étapes : 1. Montrer des convergences directionnelles

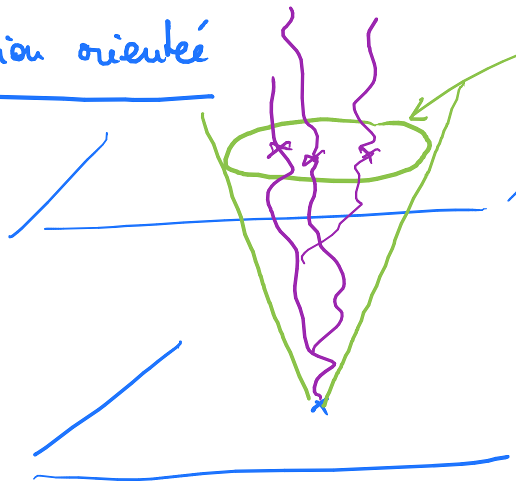
2. Récupérer une convergence globale.

⑤ Temps de régénération en percolation orientée

$\xi_n^0 = \{ x \in \mathbb{Z}^d : (0,0) \to (x,n) \}$

$t(x) = \inf \{ n \geq 0 : (0,0) \to (x,n) \}$

$H_n = \{ x \in \mathbb{Z}^d : t(x) \leq n \}$



Théorème (Shape Theorem)

il existe une norme μ_p sur $\mathbb{R}^d$, de boule unité A_p, telle que $\forall \varepsilon > 0$

$$\overline{\mathbb{P}}_p \left(\begin{array}{l} \text{à partir d'un} \\ \text{certain rang} \end{array} \quad (1-\varepsilon) n A_p \subset \frac{H_n + [0,1]^d}{n} \subset (1+\varepsilon) n A_p \right) = 1$$

juste pour épaissir

probabilité conditionnée à $\{(0,0) \to \infty\}$

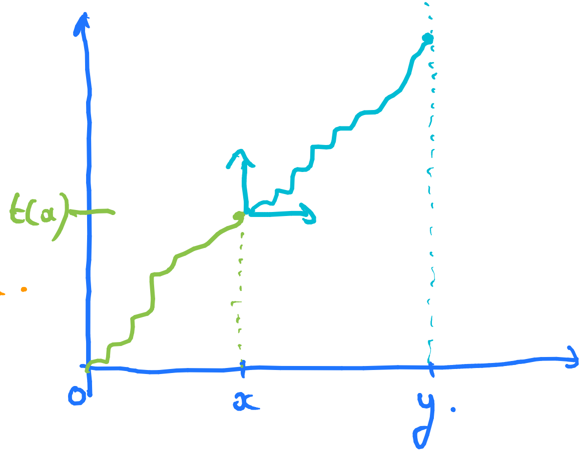
Durrett - Griffeath [89]

Bezuidenhout - Grimmett [91]

idée : sous-additivité !

$$\boxed{t(x+y) \leqslant t(x) + t(y) \circ \tau_x \circ \theta_{t(x)}}$$

translation spatiale — translation temporelle.



Mais : chacune de ces quantités peut être infinie...

On construit le temps d'atteinte essentiel $\sigma(x)$: [GARET MARCHAND 08]

temps de régénération

- $(0,0) \longrightarrow (x, \sigma(x)) \longrightarrow \infty$
- $\tau_x \circ \theta_{\sigma(x)}$ laisse $\overline{\mathbb{P}}$ invariante. $\tilde{\theta}_x = \tau_x \circ \theta_{\sigma(x)}$
- sous $\overline{\mathbb{P}}_p$, $\left(\sigma(x), \sigma(x) \circ \tilde{\theta}_x, \dots\right)$ v.a.i.id avec bonne intégrabilité
- $\sigma(x+y) \leqslant \sigma(x) + \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x + r(x,y)$

pas trop grave car pas trop gros.

- $\sigma(x) - t(x) = o(\|x\|)$.

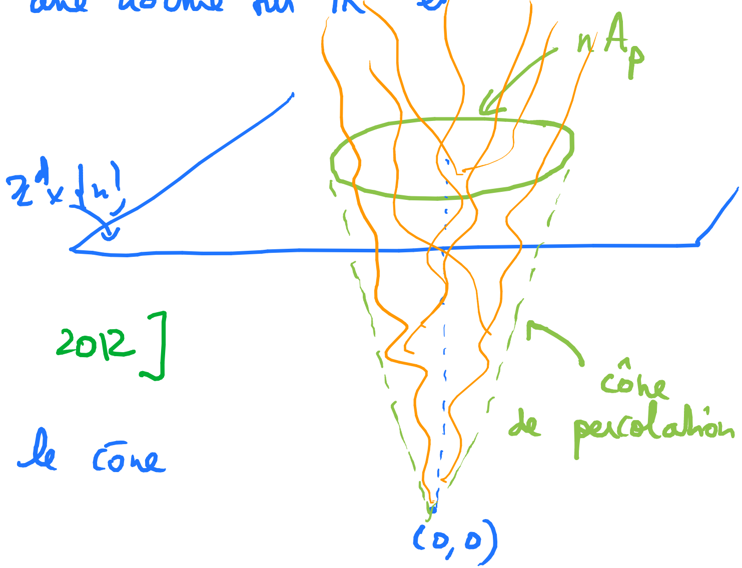
permet de revenir de σ au vrai temps d'atteinte t

On peut appliquer un th ergodique (presque) sous-additif

- <u>convergence directionnelle</u> : $\forall x \in \mathbb{Z}^d \quad \exists \mu_p(x) \quad \dfrac{\sigma(nx)}{n} \xrightarrow[\mathbb{P}_p\ \text{p.s.}]{} \mu_p(x)$

- convergence uniforme : μ_p est une norme sur $\mathbb{R}^d$ et
  <u>Th. forme asymptotique</u> :
  $$\frac{H_n + [0,1]^d}{n} \simeq A_p$$

- <u>Inégalités de grandes déviations</u> [GARET MARCHAND 2012]

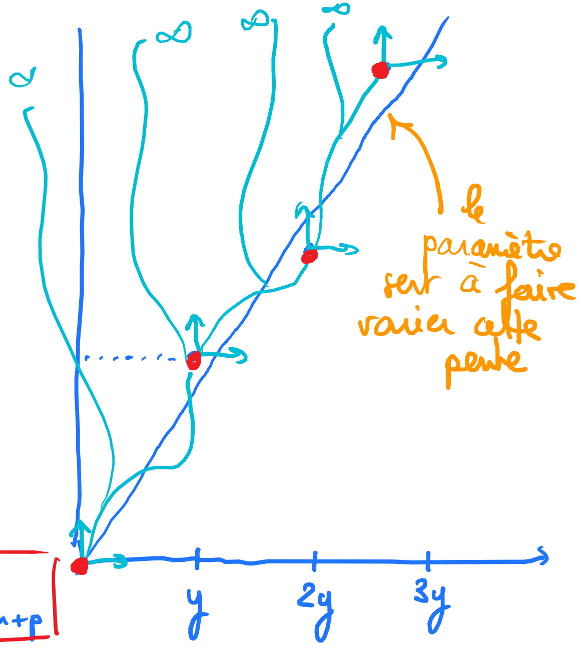


Ici : • les longs chemins vivent dans le cône de percolation

- les points $(x, \sigma(x))$ sont des points de régénération, mais situés sur le bord du cône : pour les chemins, il en faut d'autres.

$y \in \mathbb{Z}^d$, $h \in \mathbb{N}$ on fabrique $s(y,h)$:

- $(0,0) \longrightarrow (y, s(y,h)) \longrightarrow \infty$
- $\overline{\mathbb{P}}_p$ invariante par $\hat{\theta}_{y,h}$
- $\left(s(y,h) \circ \hat{\theta}^j\right)_{j \in \mathbb{N}}$ v.a.i.i.d + $\int$bilité



On définit la suite des points rouges $\bullet$:

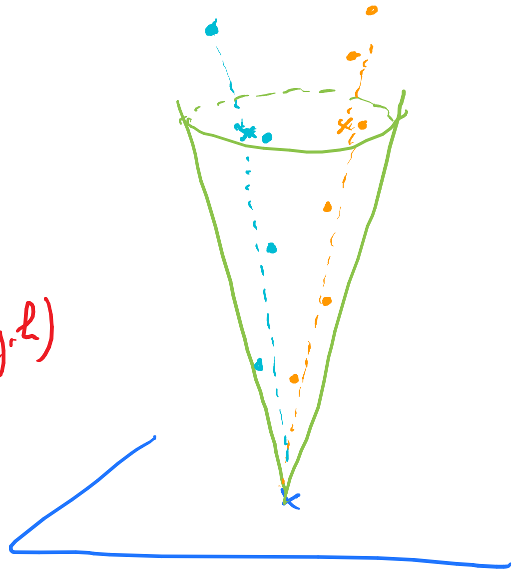
$$S_n(y,h) = \sum_{k=0}^{n} s(y,h) \circ \hat{\theta}^k \overset{LGN}{\sim} n\,\mathbb{E}\, s(y,h)$$

- Sous-additivité : $\boxed{N_{ny,S_n} \cdot N_{py,S_p \circ \hat{\theta}^n} \leq N_{(n+p)y,\, S_{n+p}}}$

intégrabilité : $0 \leq \log N_{ny,S_n} \leq S_n \log(2d+1)$

(Th erg ss-add) $\exists\, \alpha_p(y,h)$: $\frac{1}{n} \log N_{ny,S_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{\overline{\mathbb{P}}_p \text{ p.s.}} \alpha_p(y,h)$

(LGN) $\frac{S_n(y,h)}{n} \xrightarrow{\overline{\mathbb{P}}_p \text{ p.s.}} \mathbb{E}\, s(y,h)$



Résumé : • pour $(y,k) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$ on a fabriqué une suite $(n_y, S_n(y,k))$ le long de laquelle on a la convergence souhaitée.

$$\frac{1}{S_n(y,k)} \log N_{n_y, S_n(y,k)} \longrightarrow \tilde{\alpha}_p(y,k)$$

• L'adhérence des directions de l'ensemble de ces points est dense dans le cône de percolation.

Contribution maximale : $\tilde{\alpha}_p = \sup \{ \tilde{\alpha}_p(y,k) : y \in \mathbb{Z}^d, k \in \mathbb{N} \}$.

On va montrer que $\frac{1}{n} \log N_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\overline{\mathbb{P}}\ p.s} \tilde{\alpha}_p$

• on remplace N_n par $\overline{N_n} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} N_{x,n} \mathbb{1}_{(x,n) \to \infty}$

avantage : $\overline{N_n}$ est croissant.

• <u>Étape facile</u> : $S_k(y,h) \le n \le S_{k+1}(y,h)$

$$\overline{N_n} \geq \overline{N_{S_k}} \geq N_{ky, S_k}$$

$$\frac{1}{n} \log \overline{N_n} \geq \frac{S_k}{S_{k+1}} \frac{1}{S_k} \log N_{nk, S_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \tilde{\alpha}_p(y,h)$$

donc $\underline{\lim} \frac{1}{n} \log \overline{N_n} \geq \sup \tilde{\alpha}_p(y,h) = \tilde{\alpha}_p$

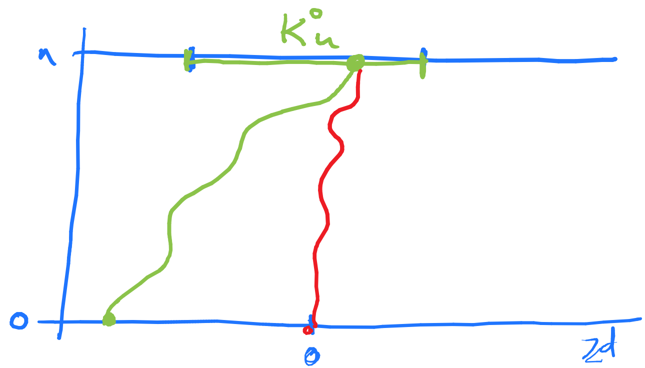
• <u>Étape moins facile</u> : $\overline{\lim} \frac{1}{n} \log \overline{N_n} \leq \tilde{\alpha}_p$.

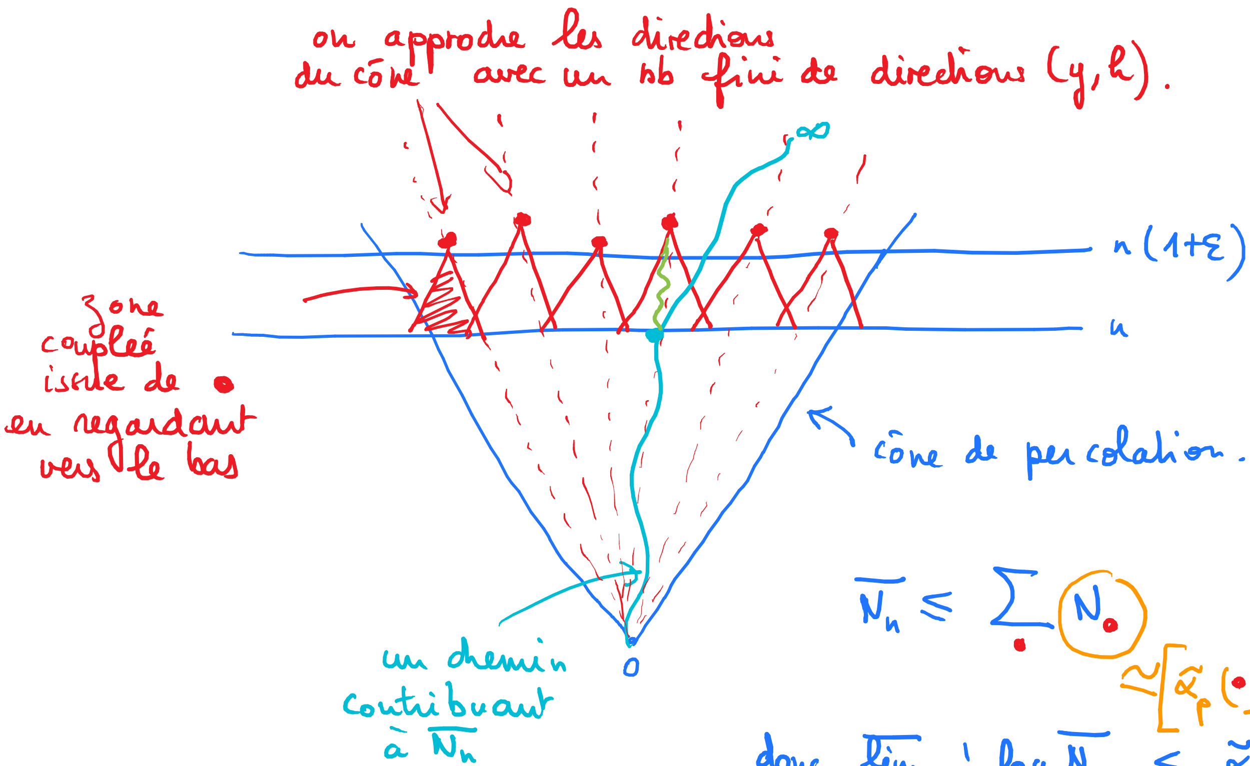
<u>idée</u> : des points proches et reliés à $(0,0)$ devraient avoir des nombres de chemins proches.

<u>formalisation</u> : zone couplée :

$$K_n^0 = \{x \in \mathbb{Z}^d : \xi_n^0(x) = \xi_n^{\mathbb{Z}^d}(x)\}$$

si $x \in K_n^0$ et $\exists y \in \mathbb{Z}^d : (y,0) \to (n,x)$
alors $(0,0) \to (n,x)$.





$$\overline{N_n} \leq \sum_{\bullet} \underbrace{N_\bullet}_{\sim [\tilde{\alpha}_p(\bullet)]^n}.$$

donc $\overline{\lim} \frac{1}{n} \log \overline{N_n} \leq \tilde{\alpha}_p$

Merci pour votre attention.