Comportement en temps long dans l'équation de Fokker-Planck libre avec un potentiel non convexe

Catherine Donati-Martin
Laboratoire de Mathématiques de Versailles

En collaboration avec Benjamin Groux et Mylène Maïda

Journées de Probabilités - 19 au 23 juin 2017

Introduction

On considère l'équation de Fokker-Planck libre

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu_t\left(\frac{1}{2}V' - H\mu_t\right)\right] \tag{1}$$

μ_t mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$
V potentiel (polynôme de degré pair, de coefficient dominant > 0, non convexe)
H transformée de Hilbert

$$H\mu(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-y} d\mu(y) := \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[x-\epsilon, x+\epsilon]} \frac{1}{x-y} d\mu(y)$$

Solution de (1) au sens faible : pour toute fonction test φ régulière,

$$\frac{d}{dt}\int \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu_t(x) = \\ -\frac{1}{2}\int V'(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}\mu_t(x) + \frac{1}{2}\iint \frac{\varphi'(x)-\varphi'(y)}{x-y}\,\mathrm{d}\mu_t(x)\mathrm{d}\mu_t(y)\,.$$

Existence et unicité connues lorsque la condition initiale est à support compact.

Question : Quel est le comportement de μ_t quand $t \to +\infty$?

Equation des milieux granulaires

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = \nabla . \left[\mu_t (\nabla \mathcal{U}'(\mu_t) + \nabla \mathcal{V} + \nabla \mathcal{W} * \mu_t) \right] .$$

$\mathcal{U} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{V}, \mathcal{W} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Fokker-Planck libre correspond à : $d = 1$, $\mathcal{U}(s) = 0$, $\mathcal{V}(x) = \frac{1}{2} V(x)$ et $\mathcal{W}(x) = -\ln|x|$.
- Equation de la chaleur : $\mathcal{U}(s) = s\ln(s)$, $\mathcal{V}(x) = \mathcal{W}(x) = 0$.

1) **Méthode analytique : dissipation d'entropie**
De nombreux travaux sur le comportement asymptotique, à l'aide de

$$F(\mu) = \int \mathcal{U}(\mu(x))\,dx + \int \mathcal{V}(x)\,d\mu(x) + \frac{1}{2}\iint \mathcal{W}(x-y)\,d\mu(x)d\mu(y)\,.$$

- $t \mapsto F(\mu_t)$ est décroissante
- Sous des hypothèses de convexité, F convexe.
- Souvent, $\mathcal{U}(s) = 0$ ou $s\ln(s)$, $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ polynomiaux ou convexes.

Ref: Carrillo-McCann-Villani, Bolley et al, etc

2) **Méthode probabiliste, système de particules**
Rappel : (X_t) solution de l'EDS $(d = 1)$

$$dX_t = \sqrt{2}dB_t - \frac{1}{2}V'(X_t)dt$$

La loi de X_t est solution de l'eq. de Fokker Planck

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = \Delta \mu_t + \nabla . \left[\mu_t \nabla (\mathcal{V}) \right] .$$

correspondant à $\mathcal{U}(s) = s \ln(s)$, $\mathcal{W} = 0$, $\mathcal{V} = \frac{1}{2}V$.
Pour $\mathcal{W} \neq 0$, la solution μ_t de l'eq. des milieux granulaires est la loi de la solution de

$$dX_t = \sqrt{2}dB_t - \frac{1}{2}V'(X_t)dt - \mathcal{W}' * \rho_t(X_t)dt \qquad (2)$$

où $(\rho_t)_{t \geq 0}$ est la densité des lois de $(X_t)_{t \geq 0}$.

On peut associer à (2) un système de particules.

Ref: Benachour-Roynette-Vallois, Malrieu, Herrmann-Tugaut (cas d'un potentiel $\mathcal{V}$ à double puits), Li-Li-Xie (cas d'une interaction $\mathcal{W}$ logarithmique)

Mouvement Brownien de Dyson

Version dynamique du GUE (Gaussian Unitary ensemble)
GUE : matrice hermitienne à coefficients gaussiens
Mouvement brownien hermitien de taille N:

$$H_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(B_{ij}(t)\right)_{i,j \leq N}$$

avec $(B_{ii})_i$ MB réels, $(B_{ij})_{i<j}$ MB complexes, indépendants.
Le mouvement brownien de Dyson est le processus des valeurs propres $(\lambda_1^N(t), \ldots, \lambda_N^N(t))_{t \geq 0}$ de $H_N(t)$, solution du système d'EDS :

$$\forall i = 1, \ldots, N, \ d\lambda_i^N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} dB_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i^N(t) - \lambda_j^N(t)} dt \, .$$

Mouvement brownien de Dyson généralisé

On appelle mouvement brownien de Dyson généralisé (GDBM) le processus $(\lambda_1^N(t), \ldots, \lambda_N^N(t))_{t \geq 0}$ vérifiant le système d'EDS :

$$d\lambda_i^N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} dB_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\lambda_i^N(t) - \lambda_j^N(t)} dt - \frac{1}{2} V'(\lambda_i^N(t)) dt \,.$$

Ce système est défini notamment lorsque V est un polynôme de degré pair et de coefficient dominant positif. On définit la mesure empirique :

$$L_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda_i^N(t)}$$

Mouvement brownien de Dyson généralisé

On appelle mouvement brownien de Dyson généralisé (GDBM) le processus $(\lambda_1^N(t), \ldots, \lambda_N^N(t))_{t\geq 0}$ vérifiant le système d'EDS :

$$d\lambda_i^N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} dB_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{j\neq i} \frac{1}{\lambda_i^N(t) - \lambda_j^N(t)} dt - \frac{1}{2} V'(\lambda_i^N(t)) dt \, .$$

Ce système est défini notamment lorsque V est un polynôme de degré pair et de coefficient dominant positif. On définit la mesure empirique :

$$L_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda_i^N(t)} \, ,$$

Que se passe-t-il quand $N \longrightarrow \infty$, $t \longrightarrow \infty$?

$$\begin{array}{ccc} L_N(t) & \to & \mu_t \\ \downarrow & & \downarrow\ ? \\ L_N & \to & \mu_V \end{array}$$

où $L_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda_i^N}$ et

$$(\lambda_1^N, \ldots, \lambda_N^N) \sim \frac{1}{Z^N} \prod_{i<j} |x_i - x_j|^2 \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} V(x_i)\right) dx_1 \ldots dx_N$$

et μ_V est la mesure d'équilibre associée au potentiel V, i.e. l'unique minimiseur de

$$\Sigma_V : \mu \mapsto -\iint_{\mathbb{R}^2} \ln|x-y|\, d\mu(x)d\mu(y) + \int_{\mathbb{R}} V(x)\, d\mu(x)\,.$$

Exemples :

- $V(x) = \frac{x^2}{2}$, alors μ_V est la loi semicirculaire

$$d\mu_V(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}1_{[-2,2]}(x)dx$$

- $V(x) = \frac{x^4}{4} + c\frac{x^2}{2}$
  - Si $c \geq -2$, alors

$$d\mu_V(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}x^2 + b_0\right)\sqrt{a^2-x^2}\mathbf{1}_{[-a,a]}(x)\,dx$$

    où

$$a^2 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{c^2+12} - c\right), \qquad b_0 = \frac{1}{3}\left(c + \sqrt{\frac{c^2}{4}+3}\right).$$

  - Si $c < -2$, alors

$$d\mu_V(x) = \frac{1}{2\pi}|x|\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}\mathbf{1}_{[-b,-a]\cup[a,b]}(x)\,dx$$

    où $a^2 = -2-c$, $b^2 = 2-c$.

Diffusions libres

$$(H_N(t), t \geq 0) \xrightarrow[N \to \infty]{(loi)} (S(t), t \geq 0)$$

où $(S(t))_t$ est un processus non commutatif : $S(t) \in \mathcal{A}$, $(\mathcal{A}, \tau)$ est une algèbre (d'opérateurs) munie d'une "espérance" τ (forme linéaire positive).

$$\forall t_1, \dots, t_k, \mathbb{E}\left(\frac{1}{N}\operatorname{Tr}(H_N(t_1)\dots H_N(t_k))\right) \longrightarrow \tau(S(t_1)\dots S(t_k))$$

On a aussi un résultat p.s..
$(S(t))_t$ est un mouvement brownien libre (processsus d'opérateurs autoadjoints à accroissements libres, de loi semicirculaire)

On peut considérer l'EDS libre

$$dX_t = dS_t - \frac{1}{2}V'(X_t)dt$$

où S est un mouvement brownien libre et V est un potentiel.

Proposition (Biane-Speicher)

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ la solution de cette EDS libre. Les distributions μ_t des X_t satisfont l'équation de Fokker-Planck libre

$$\frac{\partial \mu_t}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu_t\left(\frac{1}{2}V' - H\mu_t\right)\right].$$

Loi de X_t définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \tau(X_t^n) = \int x^n d\mu_t(x)$

Biane et Speicher ont montré (pour V potentiel confinant):

- $\mathrm{supp}(\mu_t) \subset [-M, M]$
- $\|p_t\|_\infty \leq \frac{K_1}{\sqrt{t}} + K_2$
- "régularité" de la densité
- Il existe des potentiels V non convexes pour lesquels :

$$\exists \mu_0, \mu_t \not\longrightarrow \mu_V.$$

Notre résultat

$$V(x) = \frac{x^4}{4} + c\frac{x^2}{2}$$

Théorème (D-M, Groux, Maïda)

Soit $c \geq -2$. On suppose que μ_0 est à support compact. Alors la solution $(\mu_t)_{t\geq 0}$ de l'équation de Fokker-Planck libre satisfait

$$\lim_{t\to+\infty} W_p(\mu_t, \mu_V) = 0$$

pour tout $p \geq 1$.

Idée de preuve

Étape 1 : Σ_V décroît le long de la trajectoire $(\mu_t)_{t\geq 0}$ car

$$\frac{d}{dt}\Sigma_V(\mu_t) = -2\int \left(\frac{1}{2}V' - H\mu_t\right)^2 \, d\mu_t \, .$$

Étape 2 : extraction d'une sous-suite (μ_{t_k}) convergente de limite μ ayant de "bonnes" propriétés :
μ est une probabilité à support compact et densité bornée, solution de

$$H\mu = \frac{1}{2}V' \quad \mu\text{-p.p.}$$

$\rightarrow$ Utilisation des diffusions libres.

Étape 3 : μ a un support connexe.

$\rightarrow$ Utilisation de techniques d'analyse complexe (mesures critiques).

Étape 4 : Résolution de l'équation d'Euler Lagrange pour trouver la densité et le support $[a, b]$ de μ.

Trois types de mesures :

- Mesure d'équilibre
  $\rightarrow$ Minimiseur global de l'entropie libre Σ_V.
- Mesure stationnaire
  $\rightarrow$ Solution de $H\mu = \frac{1}{2}V'$ μ-p.p.
- Mesure critique
  $\rightarrow$ "Extremum local" de Σ_V.

Équivalence entre mesure critique et mesure stationnaire.
Il peut y avoir plusieurs mesures critiques alors qu'il n'y a qu'une seule mesure d'équilibre, lorsque V n'est pas convexe.

Dans le cas du potentiel quartique, la mesure d'équilibre est-elle la seule mesure critique ?

Ici, deux étapes :

- déterminer le nombre de nombre de composantes connexes du support ;
- calculer simultanément le support et la densité.

Théorème (Kuijlaars-Silva)

Soient V un polynôme et μ une mesure critique.

- *Il existe un polynôme R de degré $2\deg(V) - 2$ tel que*

$$R(z) = \left(G^{\mu}(z) + \frac{1}{2}V'(z)\right)^2$$

De plus,

$$R(z) = \frac{1}{4}V'(z)^2 - \int_{\mathbb{R}} \frac{V'(x) - V'(z)}{x - z}\, d\mu(x)\,.$$

- *Toute racine non réelle de R est de multiplicité paire.*
- *Le support de μ est une réunion finie d'intervalles reliant des zéros de R.*

Théorème (Muskhelishvili, Tricomi)

Soient $L = \bigcup_{j=1}^{p} [a_{2j-1}, a_{2j}]$ *et* f *une fonction höldérienne sur* L. *L'équation intégrale singulière*

$$\forall x \in L, \quad \int_L \frac{\varphi(t)}{t-x}\, dt = f(x)$$

admet une solution höldérienne et bornée φ *si et seulement si* f *satisfait les* p *conditions :*

$$\forall k \in \{0, \ldots, p-1\}, \quad \int_L \frac{t^k f(t)}{\prod_{j=1}^{2p} \sqrt{|t-a_j|}}\, dt = 0\,.$$

Dans ce cas, la solution est unique et donnée par

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi^2} \prod_{j=1}^{2p} \sqrt{|x-a_j|} \int_L \frac{f(t)}{(t-x) \prod_{j=1}^{2p} \sqrt{|t-a_j|}}\, dt\,.$$

Application au potentiel quartique

Pour le potentiel

$$V(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{c}{2}x^2 \,,$$

on a

$$R(z) = \frac{1}{4}z^6 + \frac{c}{2}z^4 + \frac{1}{4}(c^2 - 4)z^2 - \int x \, d\mu(x).z - \int x^2 \, d\mu(x) - c \,.$$

$$R(z) = \frac{1}{4}z^6 + \frac{c}{2}z^4 + \frac{1}{4}(c^2-4)z^2 - \int x\, d\mu(x).z - \int x^2\, d\mu(x) - c$$

Lemme (règle des signes de Descartes)

Soit un polynôme

$$P(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0\,.$$

On note p, resp. q, le nombre de changement de signes dans la suite $(a_n, \ldots, a_1, a_0)$, resp. $((-1)^n a_n, \ldots, -a_1, a_0)$, où on a retiré les zéros. Alors, le nombre de racines strictement positives, resp. strictement négatives, de P est au plus égal à p, resp. q, et a la même parité que p, resp. q.

Pour $c \geq -2$, R a au plus 3 racines réelles. Le support de μ est donc connexe.

Calcul de la mesure stationnaire

En utilisant la formule d'inversion de Tricomi pour résoudre

$$H\mu = \frac{1}{2}V' \quad \mu\mathrm{-p.p.},$$

on montre qu'il existe une seule probabilité à support connexe et densité bornée, c'est la mesure d'equilibre.

Le cas $c < -2$

- Si $-\sqrt{15} < c < 2$, il n'existe pas de mesure stationnaire, à densité bornée, à support connexe.
- Si $c \leq -\sqrt{15}$, il existe deux probabilités stationnaires à support connexes, une portée par $\mathbb{R}_+$ et sa symétrique.