

Journées de Probabilités 2017- Aussois
20 juin 2017

Front du processus FA sur \mathbb{Z}

Aurelia Deshayes

LPMA - Paris Diderot

Joint work with:

Oriane Blondel CNRS - Institut Camille Jordan

Cristina Toninelli CNRS - LPMA - Paris Diderot - ERC MALIG

Les modèles sur \mathbb{Z}

Fredrickson-Andersen FA:

$\circ \rightsquigarrow \bullet$ à taux q si au moins un \bullet dans ses voisins

$\bullet \rightsquigarrow \circ$ à taux $1 - q$ si au moins un \bullet dans ses voisins

Les modèles sur \mathbb{Z}

Fredrickson-Andersen **FA**:

$\circ \rightsquigarrow \bullet$ à taux q si au moins un \bullet dans ses voisins

$\bullet \rightsquigarrow \circ$ à taux $1 - q$ si au moins un \bullet dans ses voisins

Modèle **EST**:

$\circ \rightsquigarrow \bullet$ à taux q si son voisin de droite est un \bullet

$\bullet \rightsquigarrow \circ$ à taux $1 - q$ si son voisin de droite est \bullet

Les modèles sur \mathbb{Z}

Fredrickson-Andersen **FA**:

$\circ \rightsquigarrow \bullet$ à taux q si au moins un \bullet dans ses voisins

$\bullet \rightsquigarrow \circ$ à taux $1 - q$ si au moins un \bullet dans ses voisins

Modèle **EST**:

$\circ \rightsquigarrow \bullet$ à taux q si son voisin de droite est un \bullet

$\bullet \rightsquigarrow \circ$ à taux $1 - q$ si son voisin de droite est \bullet

Processus de Contact **PC**:

$\circ \rightsquigarrow \bullet$ à taux q si au moins un \bullet dans ses voisins

$\bullet \rightsquigarrow \circ$ à taux $1 - q$

Les modèles sur \mathbb{Z}

Fredrickson-Andersen **FA**:

$\circ \rightsquigarrow \bullet$ à taux q si au moins un \bullet dans ses voisins

$\bullet \rightsquigarrow \circ$ à taux $1 - q$ si au moins un \bullet dans ses voisins

Modèle **EST**:

$\circ \rightsquigarrow \bullet$ à taux q si son voisin de droite est un \bullet

$\bullet \rightsquigarrow \circ$ à taux $1 - q$ si son voisin de droite est \bullet

Processus de Contact **PC**:

$\circ \rightsquigarrow \bullet$ à taux q si au moins un \bullet dans ses voisins

$\bullet \rightsquigarrow \circ$ à taux $1 - q$

Pour tous ces modèles, $\dots \circ \circ \circ \circ \circ \circ \dots$ est absorbante

Les modèles sur \mathbb{Z}

Fredrickson-Andersen FA: $\rightarrow \sigma_t$

$\circ \rightsquigarrow \bullet$ à taux q si au moins un \bullet dans ses voisins

$\bullet \rightsquigarrow \circ$ à taux $1 - q$ si au moins un \bullet dans ses voisins

Modèle EST:

$\circ \rightsquigarrow \bullet$ à taux q si son voisin de droite est un \bullet

$\bullet \rightsquigarrow \circ$ à taux $1 - q$ si son voisin de droite est \bullet

Processus de Contact PC:

$\circ \rightsquigarrow \bullet$ à taux q si au moins un \bullet dans ses voisins

$\bullet \rightsquigarrow \circ$ à taux $1 - q$

Pour tous ces modèles, $\dots \circ \circ \circ \circ \circ \circ \dots$ est absorbante

Les modèles sur \mathbb{Z}

Fredrickson-Andersen FA: $\rightarrow \sigma_t$

$\circ \rightsquigarrow \bullet$ à taux q si au moins un \bullet dans ses voisins

$\bullet \rightsquigarrow \circ$ à taux $1 - q$ si au moins un \bullet dans ses voisins

Modèle EST:

$\circ \rightsquigarrow \bullet$ à taux q si son voisin de droite est un \bullet

$\bullet \rightsquigarrow \circ$ à taux $1 - q$ si son voisin de droite est \bullet

Processus de Contact PC: $\rightarrow \eta_t$

$\circ \rightsquigarrow \bullet$ à taux q si au moins un \bullet dans ses voisins

$\bullet \rightsquigarrow \circ$ à taux $1 - q$

Pour tous ces modèles, $\dots \circ \circ \circ \circ \circ \circ \dots$ est absorbante

Transition de phase du PC

PC est **monotone**: plus q est grand, plus il y a de ●

Transition de phase du PC

PC est **monotone**: plus q est grand, plus il y a de ●

Les ● de FA et EST ne peuvent pas tous disparaître

Transition de phase du PC

PC est **monotone**: plus q est grand, plus il y a de ●

Les ● de FA et EST ne peuvent pas tous disparaître

Par contre, les ● du PC peuvent tous disparaître: partant d'un nombre fini de ●, $\mathbb{P}(\exists t, \text{il n'y a plus aucun } ●) > 0$

Transition de phase du PC

PC est **monotone**: plus q est grand, plus il y a de ●

Les ● de FA et EST ne peuvent pas tous disparaître

Par contre, les ● du PC peuvent tous disparaître: partant d'un nombre fini de ●, $\mathbb{P}(\exists t, \text{il n'y a plus aucun } \bullet) > 0$

Transition de phase PC [Harris, 74]

Il existe une valeur critique $q_c(PC) \in (0, 1)$ telle que, partant d'un seul ●:

- si $q < q_c$, alors il y a extinction: $\mathbb{P}(\forall t, \text{il reste au moins un } \bullet) = 0$,
- si $q > q_c$, alors il y a survie: $\mathbb{P}(\forall t, \text{il reste au moins un } \bullet) > 0$

Transition de phase du PC

PC est **monotone**: plus q est grand, plus il y a de ●

Les ● de FA et EST ne peuvent pas tous disparaître

Par contre, les ● du PC peuvent tous disparaître: partant d'un nombre fini de ●, $\mathbb{P}(\exists t, \text{il n'y a plus aucun } \bullet) > 0$

Transition de phase PC [Harris, 74]

Il existe une valeur critique $q_c(PC) \in (0, 1)$ telle que, partant d'un seul ●:

- si $q < q_c$, alors il y a extinction: $\mathbb{P}(\forall t, \text{il reste au moins un } \bullet) = 0$,
- si $q > q_c$, alors il y a survie: $\mathbb{P}(\forall t, \text{il reste au moins un } \bullet) > 0$

$$q \geq q_c(PC) \approx 0,63$$

Attractivité de PC

Le PC est **attractif**: $\eta \leq \eta' \Rightarrow \eta_t \leq \eta'_t$

→ plus il y a de ● à un instant, plus il y a de ● plus tard

Attractivité de PC

Le PC est **attractif**: $\eta \leq \eta' \Rightarrow \eta_t \leq \eta'_t$

→ plus il y a de ● à un instant, plus il y a de ● plus tard

$X(\text{config}) = \text{front gauche de la configuration} = \bullet$ le plus à gauche

Attractivité de PC

Le PC est **attractif**: $\eta \leq \eta' \Rightarrow \eta_t \leq \eta'_t$

→ plus il y a de ● à un instant, plus il y a de ● plus tard

$X(\text{config}) =$ front gauche de la configuration = ● le plus à gauche

Propriétés du PC, $q > q(PC)$ [Durrett, Griffeath '83]

- Linearité: $\frac{X(\eta_t)}{t} \rightarrow v_{PC}$ et pour tout $a < v_{PC}$,

$$\mathbb{P}(X(\eta_t) > -at \mid \text{survie}) \leq e^{-ct}$$

- Petits amas finis: $\mathbb{P}(\text{temps de vie} > t \mid \text{extinction}) \leq e^{-ct}$
- Pour tout $a < v_{PC}$ et $\ell \leq at$

$$\mathbb{P}(\text{trou sans } \bullet \text{ de taille } \ell \text{ dans } [-at, at] \mid \text{survie}) \leq e^{-c t \wedge \ell}.$$

Attractivité de PC

Le PC est attractif: $\eta \leq \eta' \Rightarrow \eta_t \leq \eta'_t$

→ plus il y a de ● à un instant, plus il y a de ● plus tard

$X(\text{config}) =$ front gauche de la configuration = ● le plus à gauche

Propriétés du PC, $q > q(PC)$ [Durrett, Griffeath '83]

- Linearité: $\frac{X(\eta_t)}{t} \rightarrow v_{PC}$ et pour tout $a < v_{PC}$,

$$\mathbb{P}(X(\eta_t) > -at \mid \text{survie}) \leq e^{-ct}$$

- Petits amas finis: $\mathbb{P}(\text{temps de vie} > t \mid \text{extinction}) \leq e^{-ct}$
- Pour tout $a < v_{PC}$ et $\ell \leq at$

$$\mathbb{P}(\text{trou sans } \bullet \text{ de taille } \ell \text{ dans } [-at, at] \mid \text{survie}) \leq e^{-c t \wedge \ell}.$$

EST et FA ne sont pas attractifs

→ Les ● favorisent les changements

Attractivité de PC

Le PC est attractif: $\eta \leq \eta' \Rightarrow \eta_t \leq \eta'_t$

→ plus il y a de ● à un instant, plus il y a de ● plus tard

$X(\text{config}) =$ front gauche de la configuration = ● le plus à gauche

Propriétés du PC, $q > q(PC)$ [Durrett, Griffeath '83]

- Linearité: $\frac{X(\eta_t)}{t} \rightarrow v_{PC}$ et pour tout $a < v_{PC}$,

$$\mathbb{P}(X(\eta_t) > -at \mid \text{survie}) \leq e^{-ct}$$

- Petits amas finis: $\mathbb{P}(\text{temps de vie} > t \mid \text{extinction}) \leq e^{-ct}$
- Pour tout $a < v_{PC}$ et $\ell \leq at$

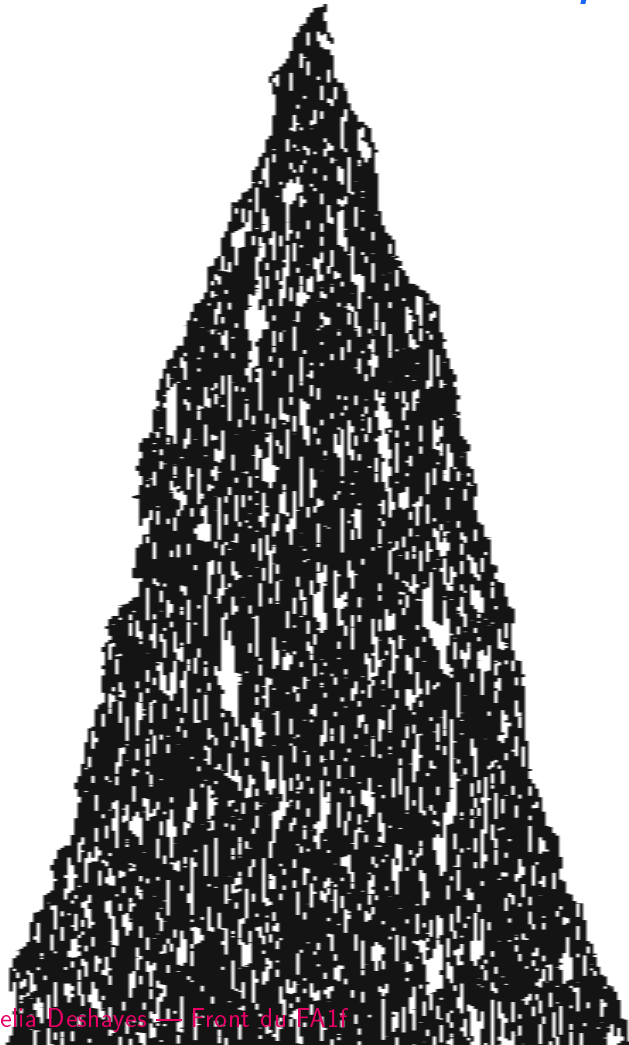
$$\mathbb{P}(\text{trou sans } \bullet \text{ de taille } \ell \text{ dans } [-at, at] \mid \text{survie}) \leq e^{-c t \wedge \ell}.$$

EST et FA ne sont pas attractifs

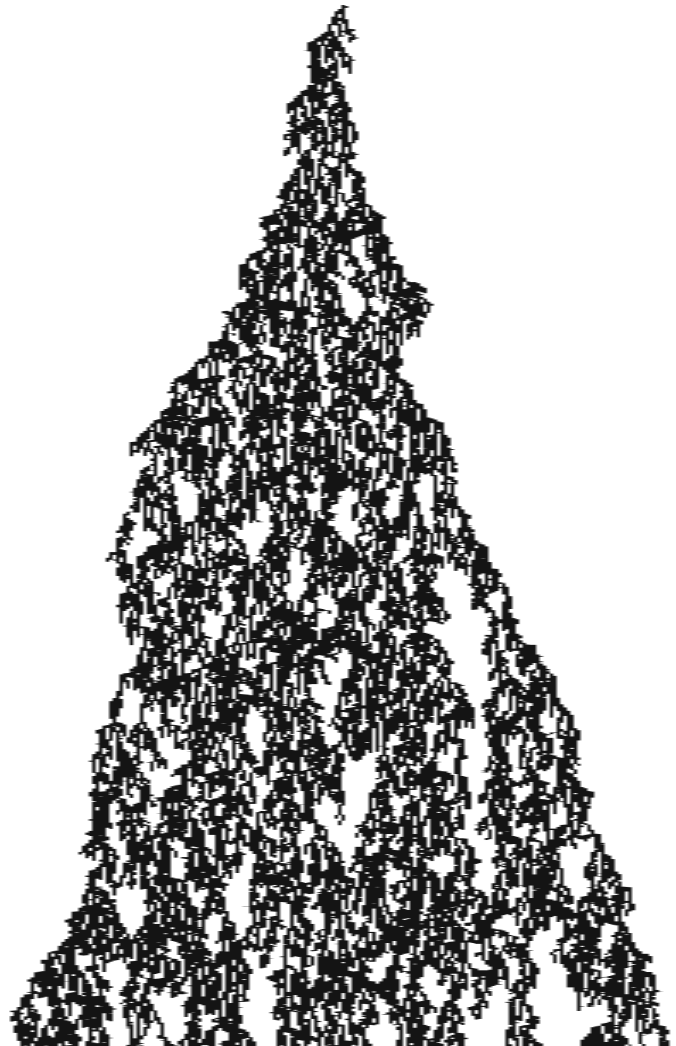
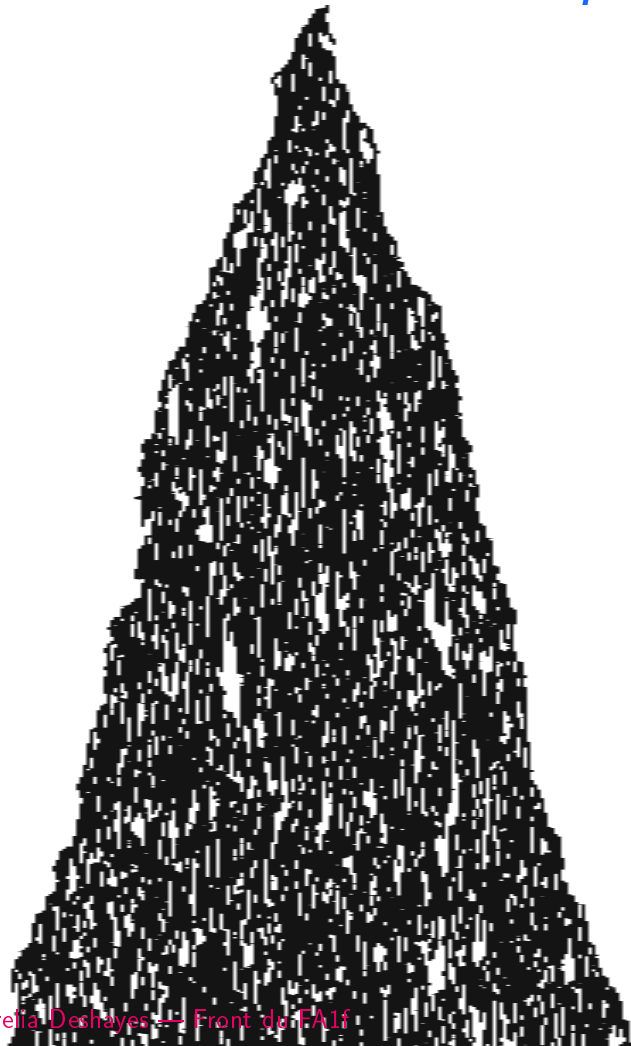
→ Les ● favorisent les changements

→ Comprendre la loi derrière le front

PC $q = 0.8$ et 0.7



PC $q = 0.8$ et 0.7



PC $q = 0.65$



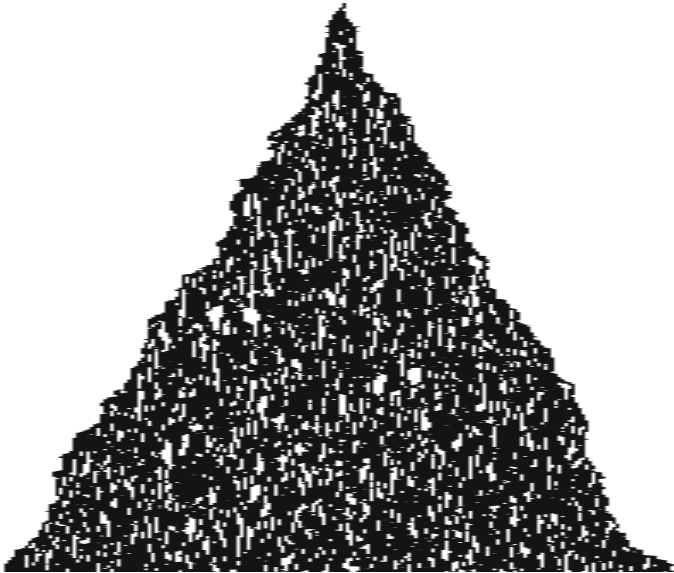
PC $q = 0.65$



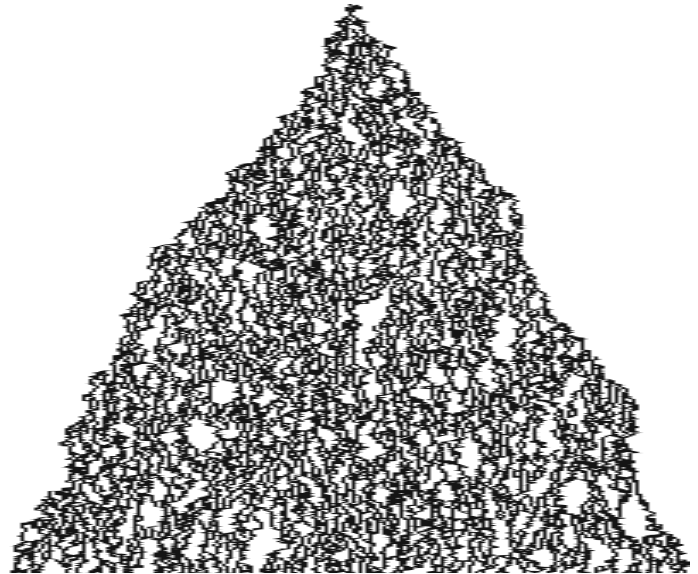
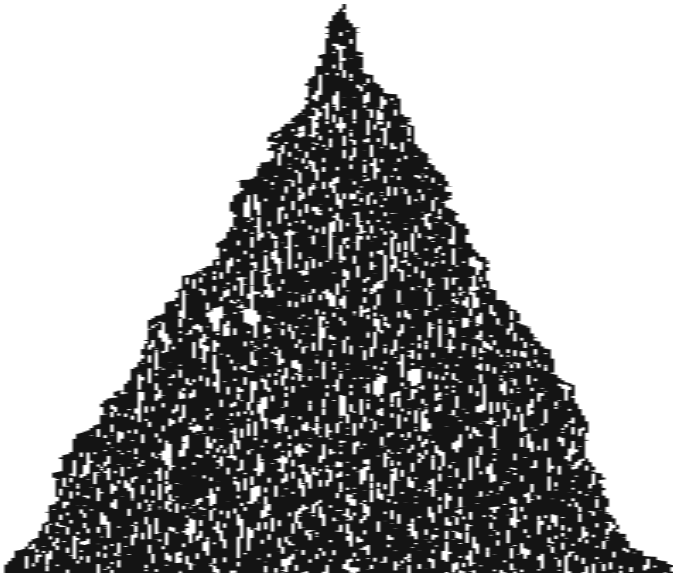
PC $q = 0.65$



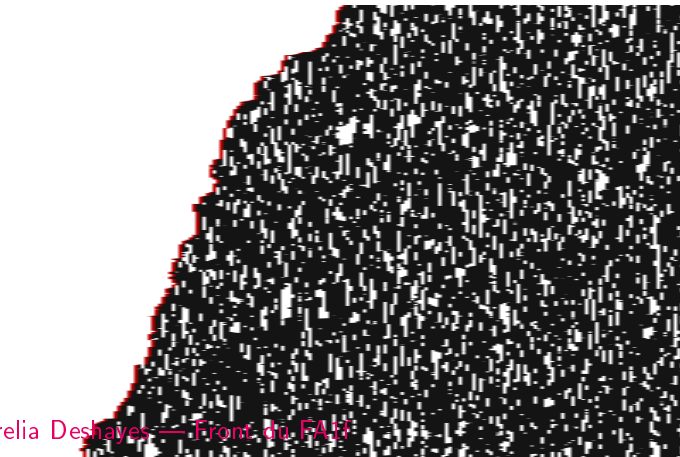
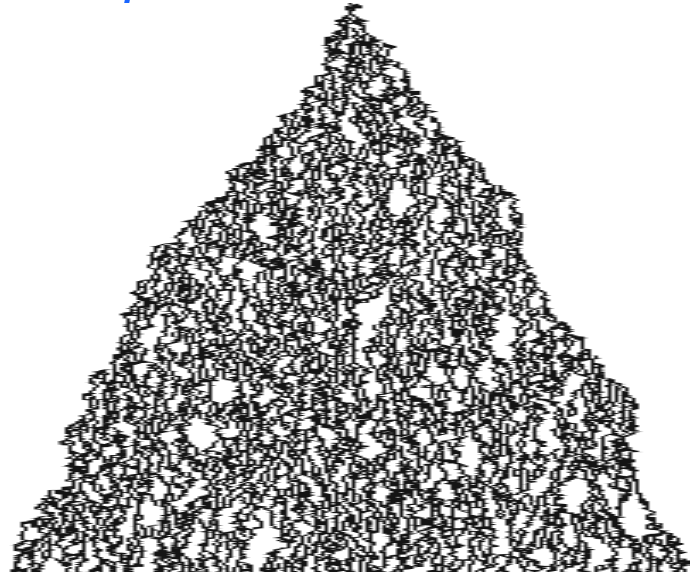
FA $q = 0.8$ et $q = 0.5$



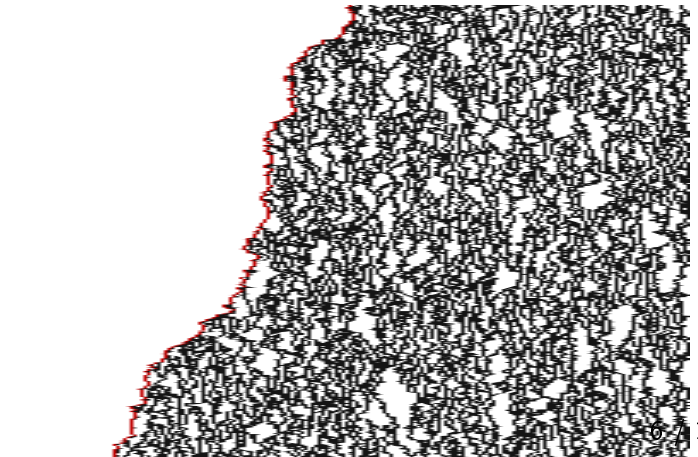
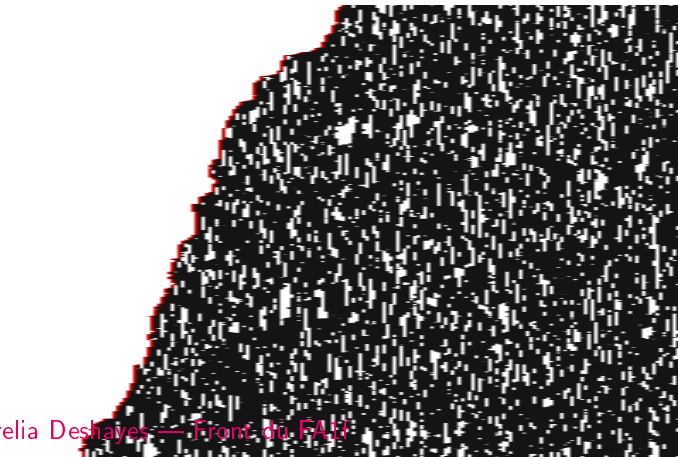
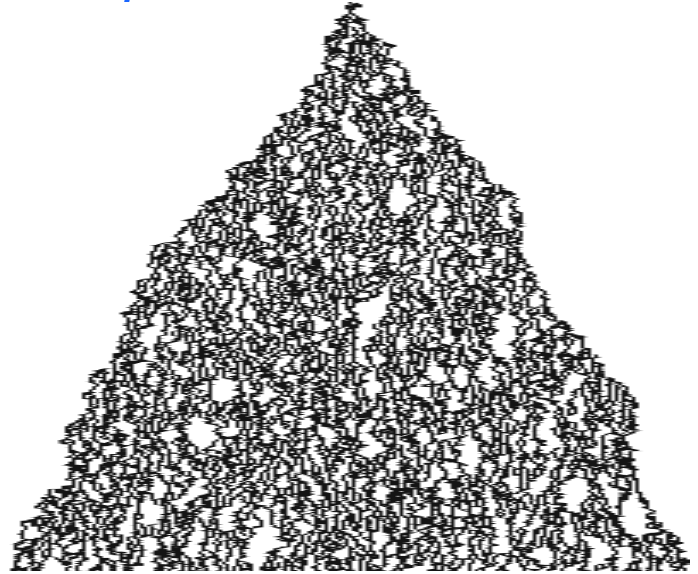
FA $q = 0.8$ et $q = 0.5$



FA $q = 0.8$ et $q = 0.5$



FA $q = 0.8$ et $q = 0.5$



Relaxation vers l'équilibre du FA

$\mu = \text{Ber}(q)^{\otimes \mathbb{Z}}$ invariante pour les modèles à contraintes cinétiques EST, FA

Relaxation vers l'équilibre du FA

$\mu = \text{Ber}(\mathbf{q})^{\otimes \mathbb{Z}}$ invariante pour les modèles à contraintes cinétiques EST, FA
[Blondel '13]: Vitesse linéaire du front pour EST

Relaxation vers l'équilibre du FA

$\mu = \text{Ber}(q)^{\otimes \mathbb{Z}}$ invariante pour les modèles à contraintes cinétiques EST, FA [Blondel '13]: Vitesse linéaire du front pour EST

Relaxation FA [Blondel, Cancrini, Martinelli, Roberto, Toninelli'13]

Soit f une fonction bornée à support dans $[-K, K]$ tel que $\mu(f) = 0$. Si

- $K \leq e^{t^\alpha}$ pour un $\alpha \in (0, 1/2)$
- Les \bullet de σ dans $[-K - \bar{v}t, K + \bar{v}t]$ sont à distance $\leq \sqrt{t}$ les uns des autres

Alors il existe c tel que

$$|\mathbb{E}_\sigma[f(\sigma_t)]| \leq \frac{1}{c} \|f\|_\infty e^{-c\sqrt{t}}.$$

Si on regarde le FA en volume fini $[-K, K]$ avec conditions aux bords \bullet , on exige les \bullet seulement sur $[-K, K]$.

Relaxation vers l'équilibre du FA

$\mu = \text{Ber}(q)^{\otimes \mathbb{Z}}$ invariante pour les modèles à contraintes cinétiques EST, FA [Blondel '13]: Vitesse linéaire du front pour EST

Relaxation FA [Blondel, Cancrini, Martinelli, Roberto, Toninelli'13]

Soit f une fonction bornée à support dans $[-K, K]$ tel que $\mu(f) = 0$. Si

- $K \leq e^{t^\alpha}$ pour un $\alpha \in (0, 1/2)$
- Les \bullet de σ dans $[-K - \bar{v}t, K + \bar{v}t]$ sont à distance $\leq \sqrt{t}$ les uns des autres

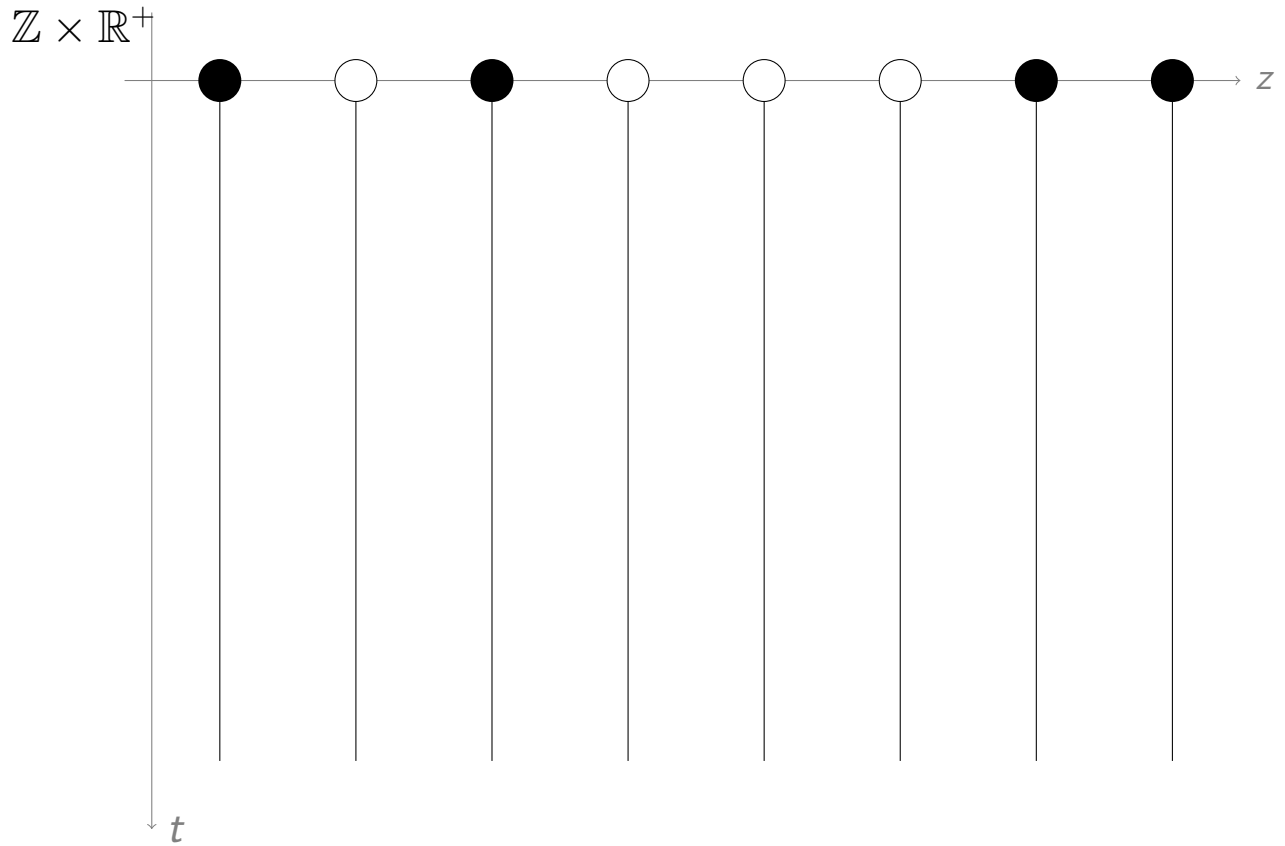
Alors il existe c tel que

$$|\mathbb{E}_\sigma[f(\sigma_t)]| \leq \frac{1}{c} \|f\|_\infty e^{-c\sqrt{t}}.$$

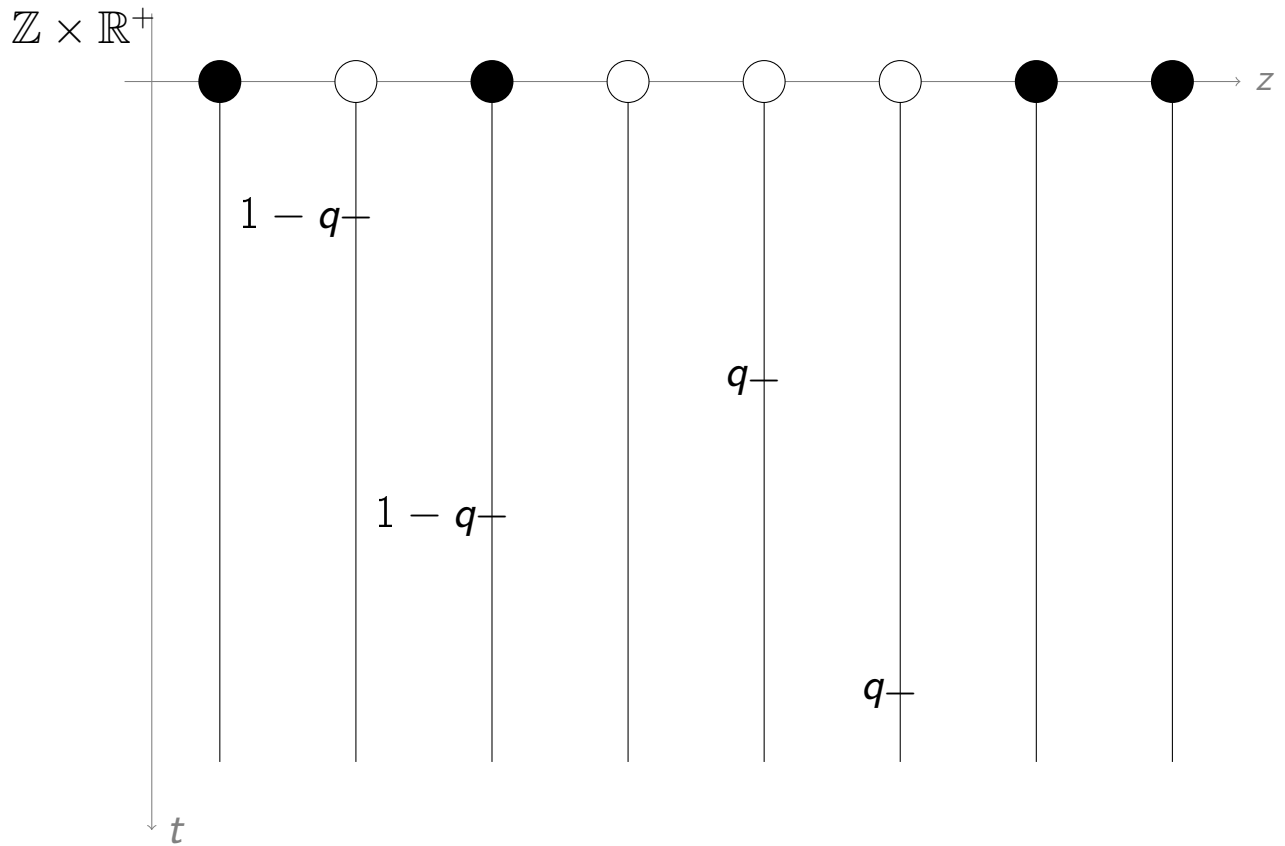
Si on regarde le FA en volume fini $[-K, K]$ avec conditions aux bords \bullet , on exige les \bullet seulement sur $[-K, K]$.

→ on a besoin de \bullet

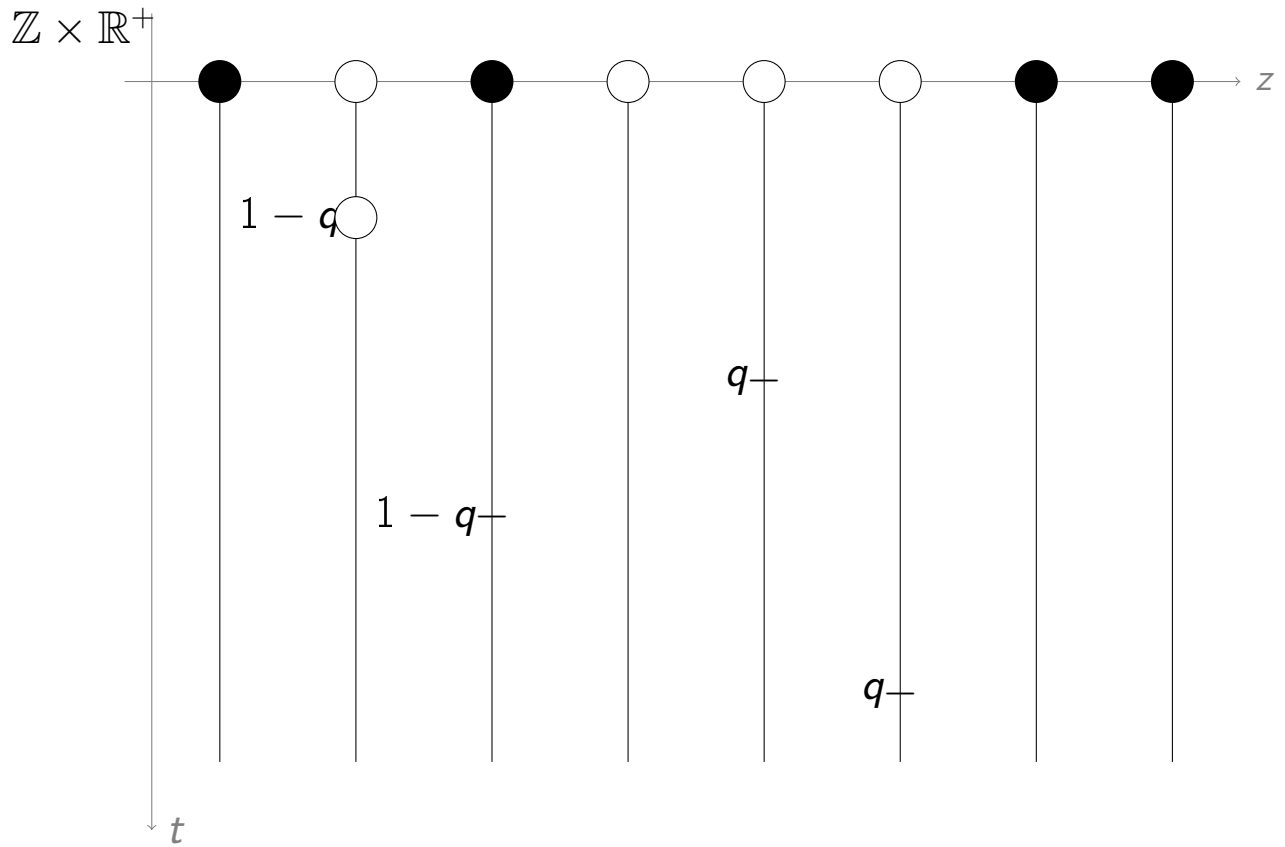
Construction graphique



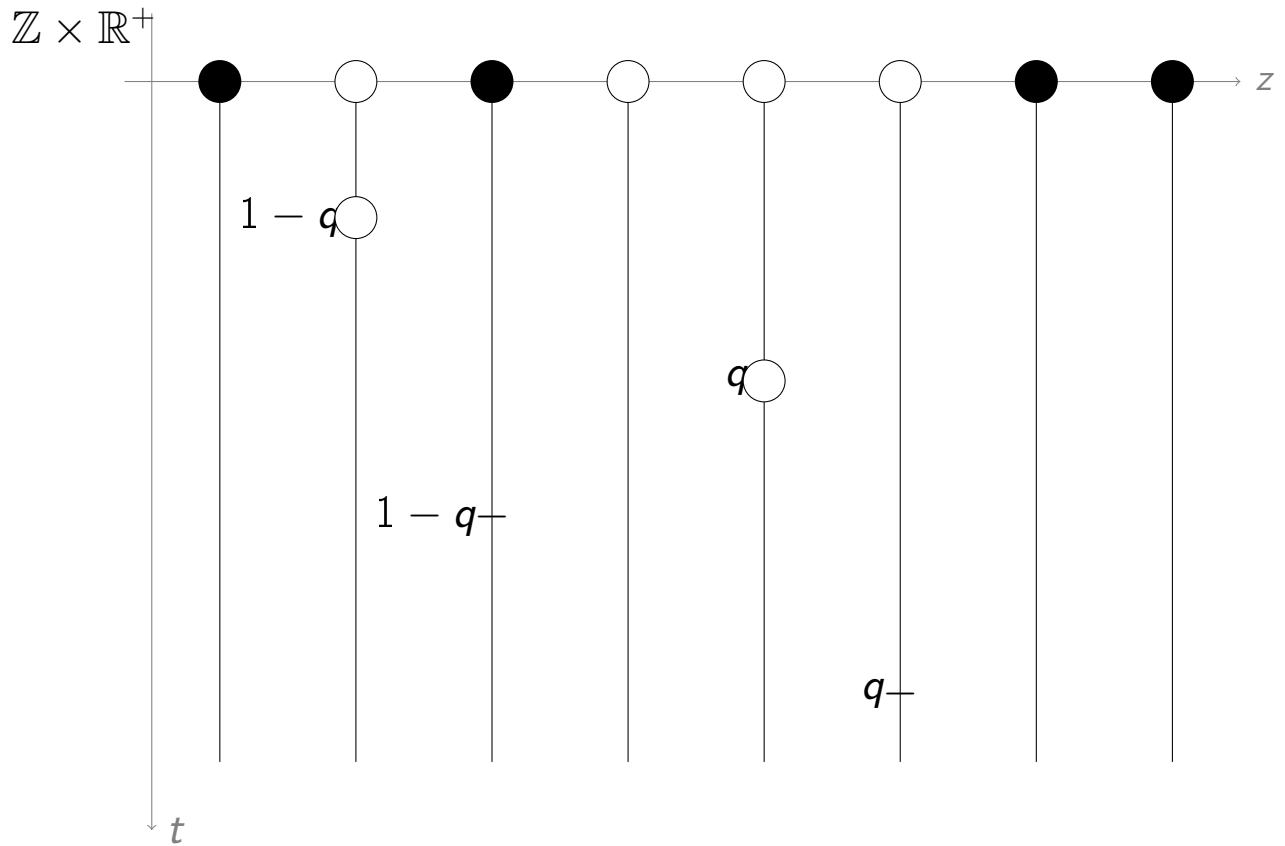
Construction graphique



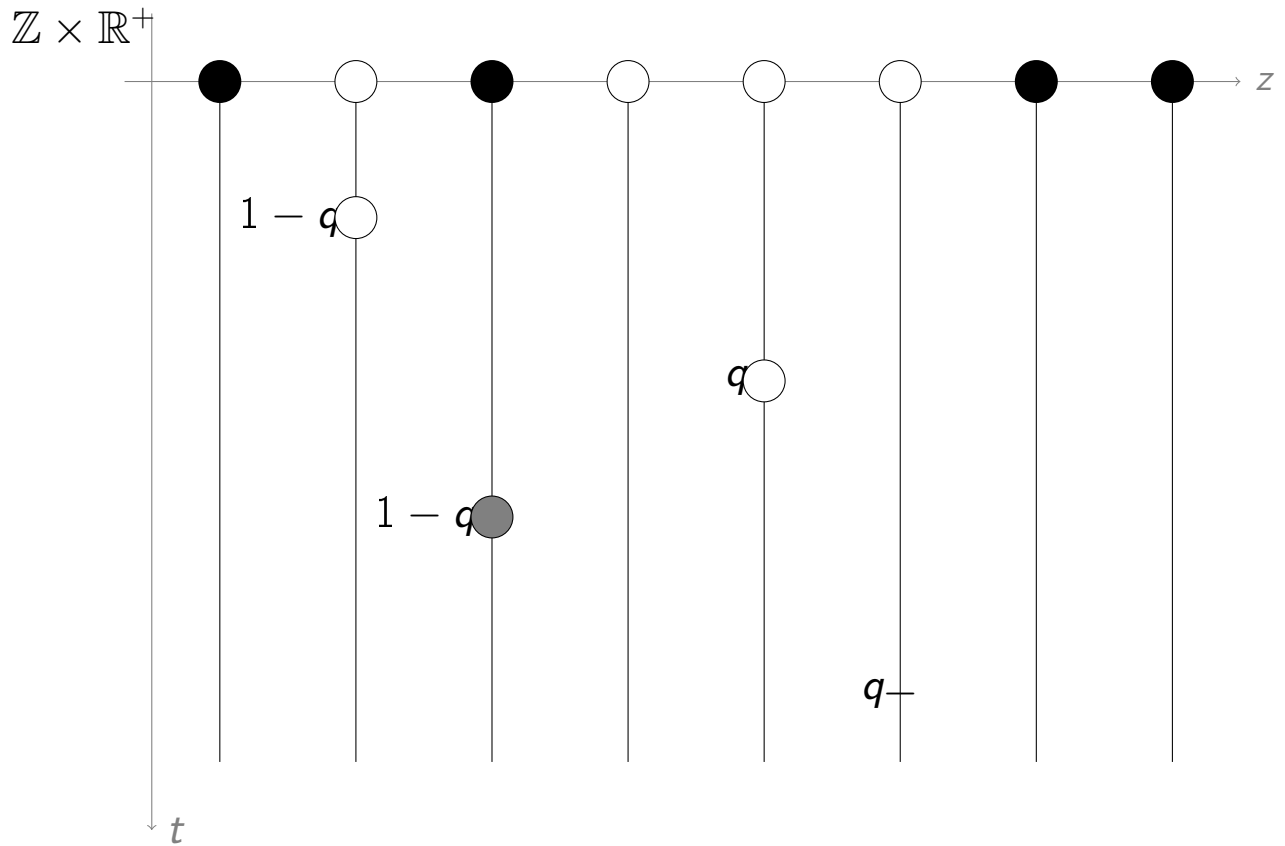
Construction graphique



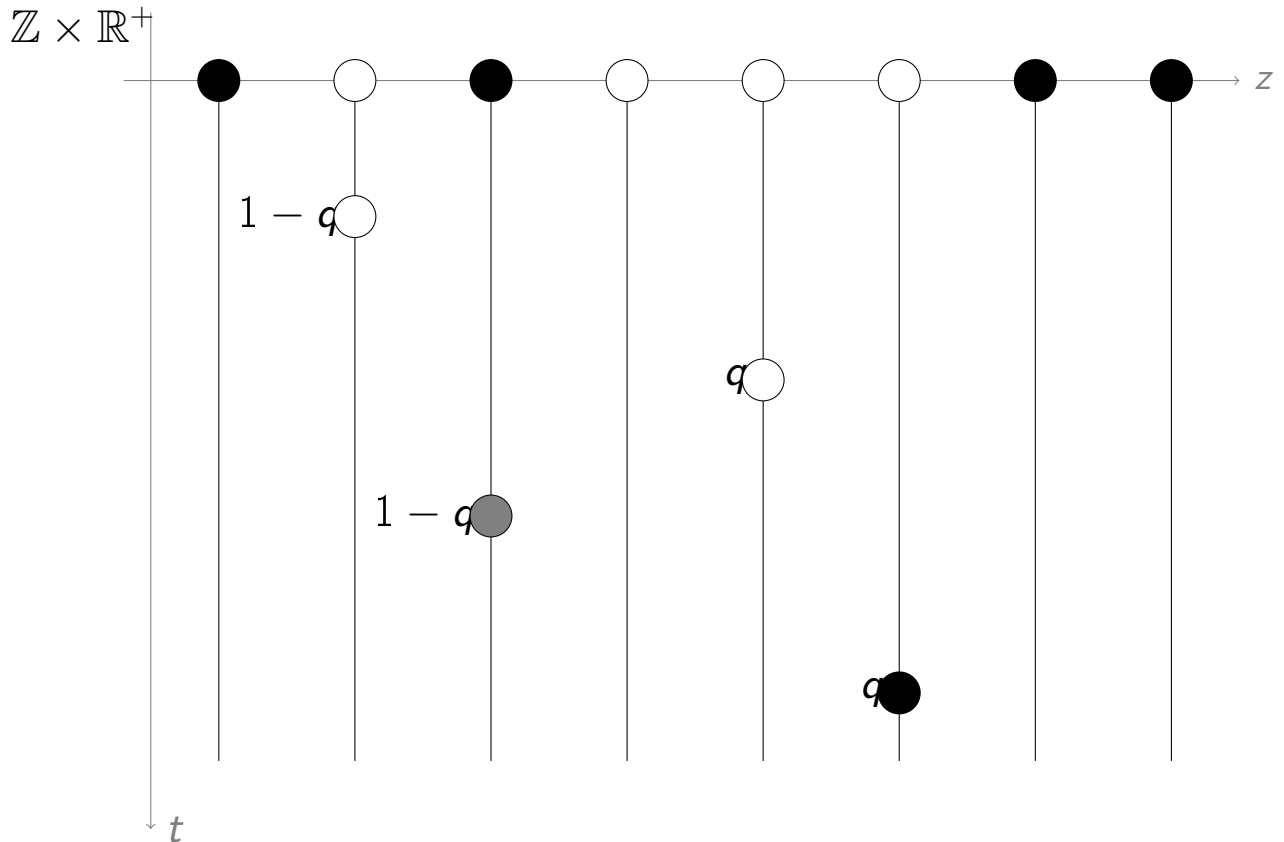
Construction graphique



Construction graphique



Construction graphique

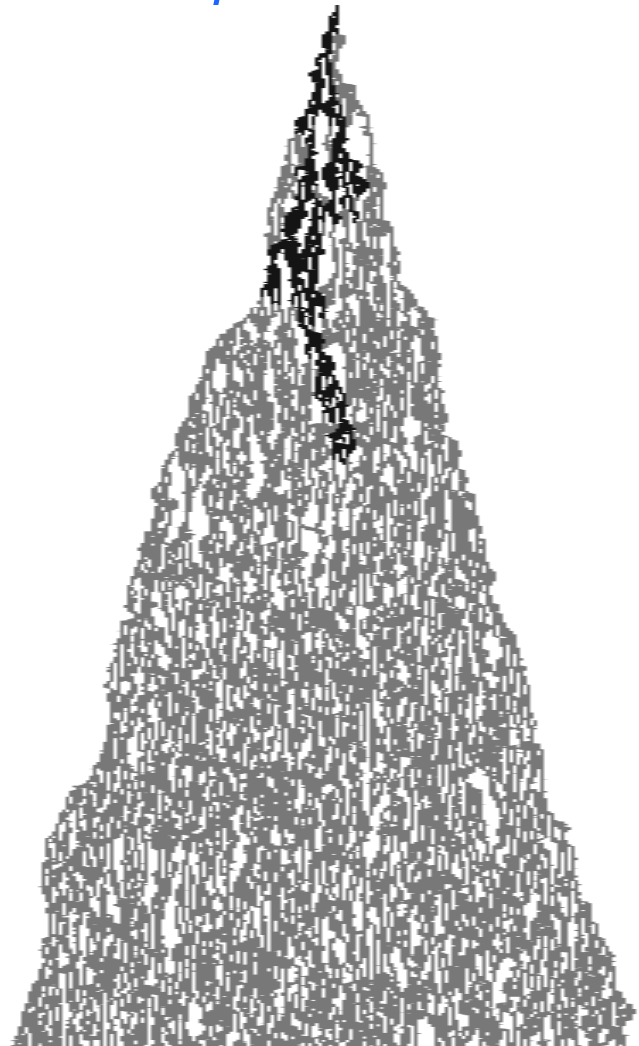


Couplage basique: $\eta_0 \leq \sigma_0 \Rightarrow \eta_t \leq \sigma_t$ (au sens du nombre de ●)

Couplage FA-PC $q = 0.65$

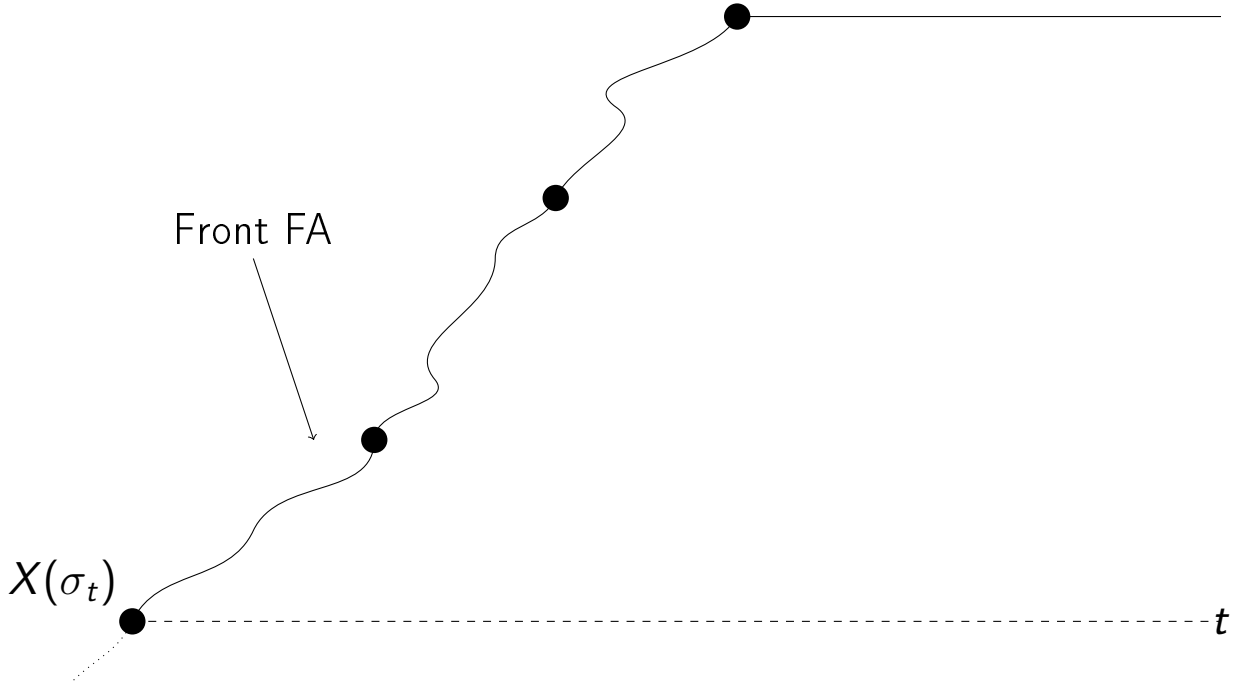


Couplage FA-PC $q = 0.65$

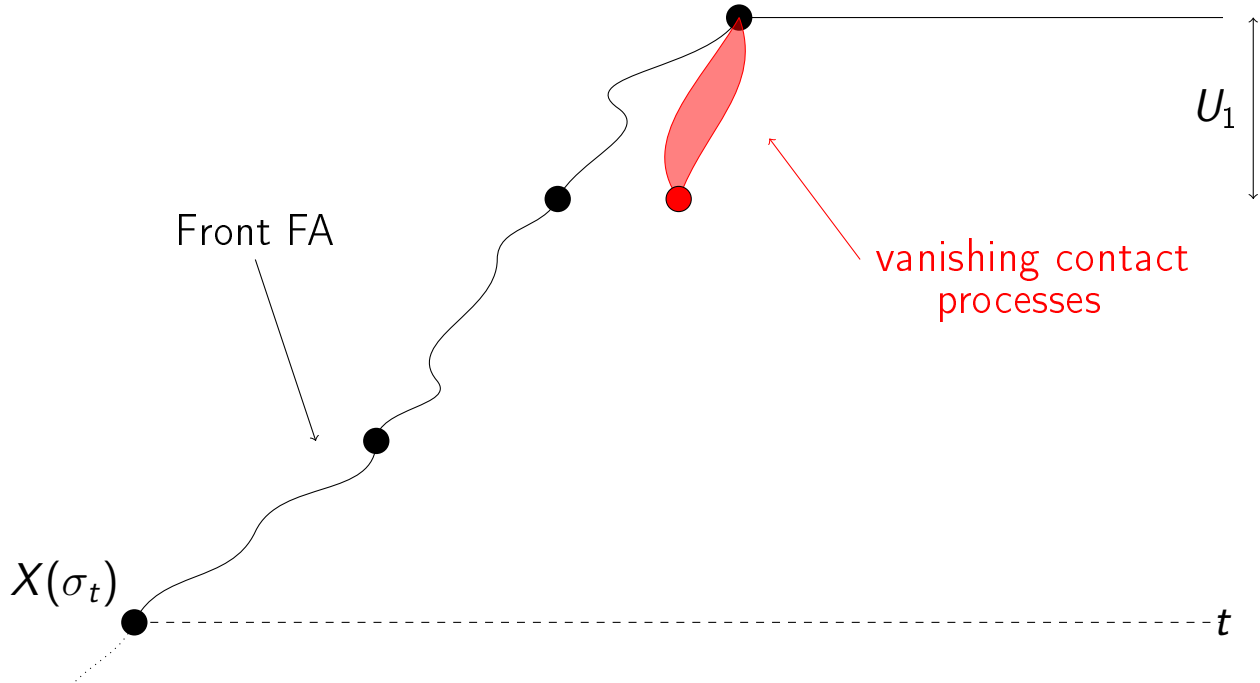


Couplage FA-PC

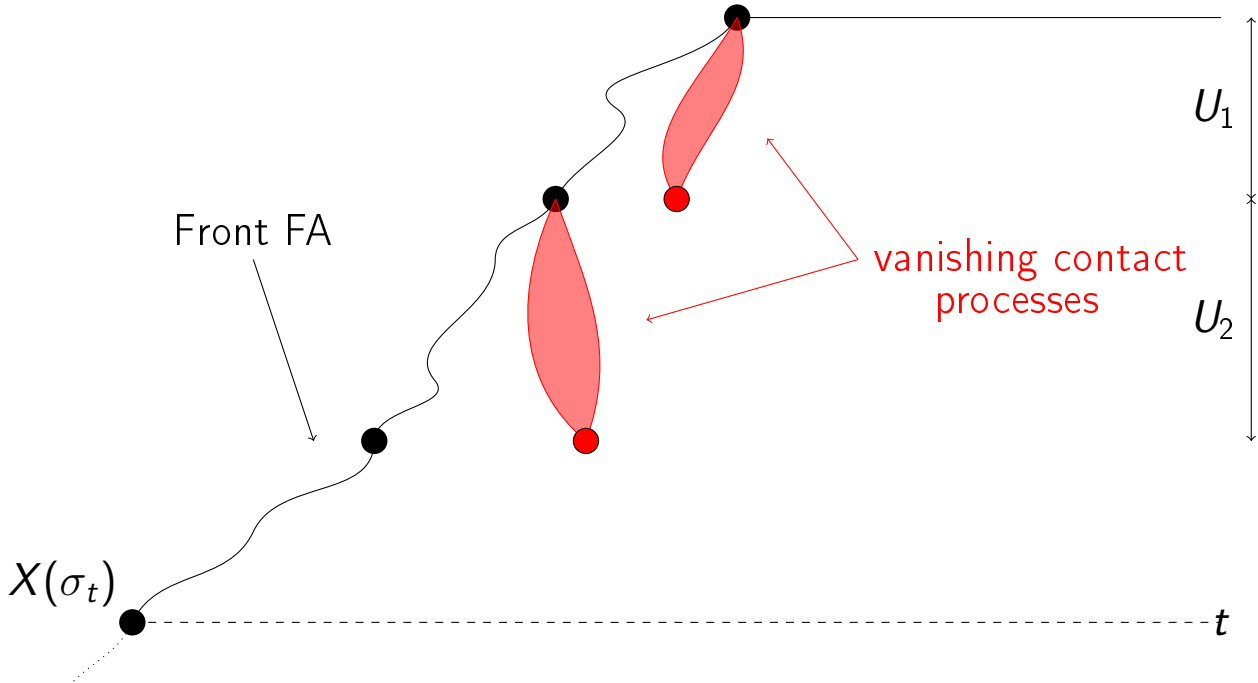
Couplage FA-PC



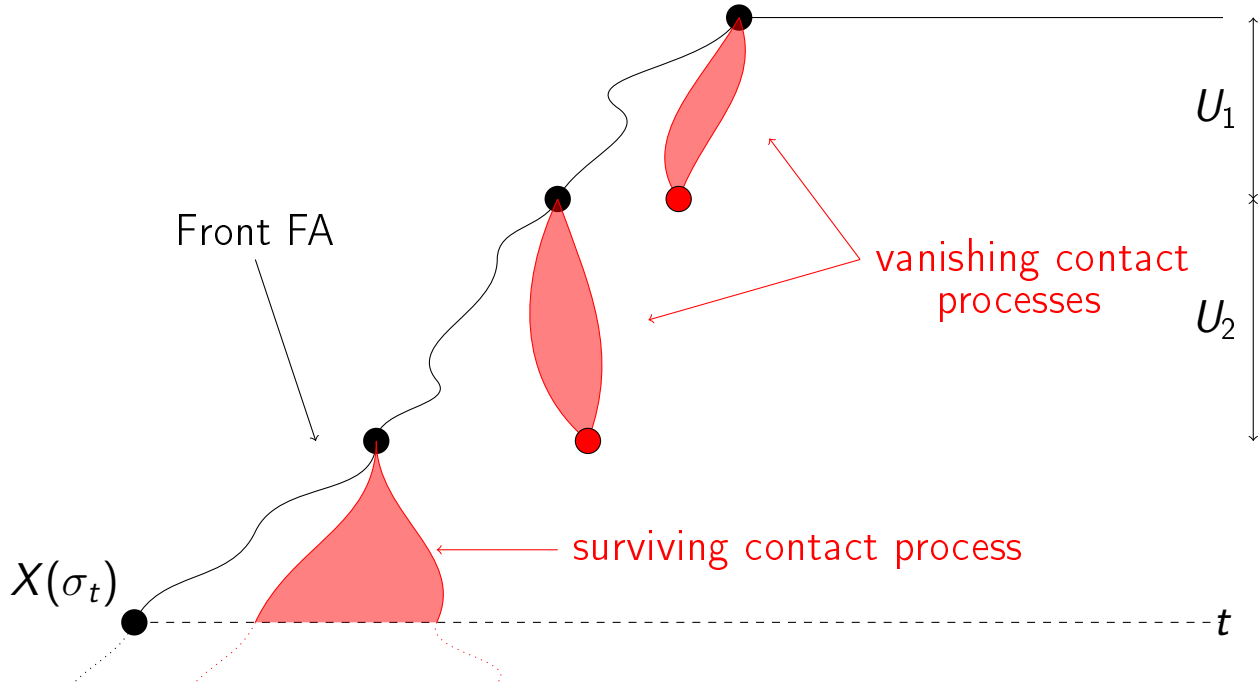
Couplage FA-PC



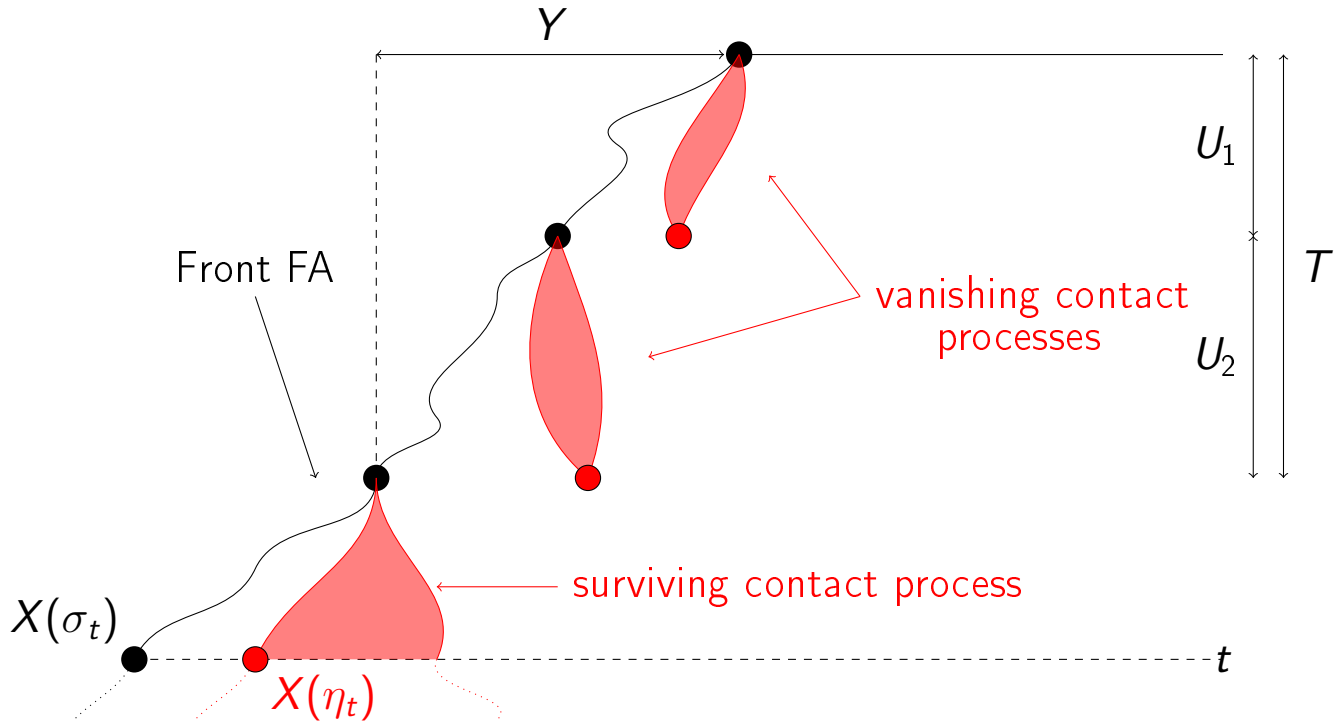
Couplage FA-PC



Couplage FA-PC



Couplage FA-PC



Front d'ordre linéaire

$LO_0 = \{ \text{configurations } \sigma \text{ avec un } \bullet \text{ en } 0 \}$

$X(\sigma_t) = \text{front du FA au tant } t \text{ partant de } \sigma$

Front d'ordre linéaire

Il existe $0 < \underline{v} < \bar{v} < \infty$ et $\gamma > 0$ tels que pour tout $\sigma \in LO_0$ et t grand

$$\mathbb{P}(X(\sigma_t) \in [-\underline{v}t, -\bar{v}t]) > 1 - e^{-\gamma t}.$$

Front d'ordre linéaire

$LO_0 = \{ \text{configurations } \sigma \text{ avec un } \bullet \text{ en } 0 \}$

$X(\sigma_t) = \text{front du FA au tant } t \text{ partant de } \sigma$

Front d'ordre linéaire

Il existe $0 < \underline{v} < \bar{v} < \infty$ et $\gamma > 0$ tels que pour tout $\sigma \in LO_0$ et t grand

$$\mathbb{P}(X(\sigma_t) \in [-\underline{v}t, -\bar{v}t]) > 1 - e^{-\gamma t}.$$

$\mathcal{H}(L, M, \ell) = \{ \text{Il n'y a pas de trous sans } \bullet \text{ de taille } \ell \text{ dans } [L, L + M] \}$

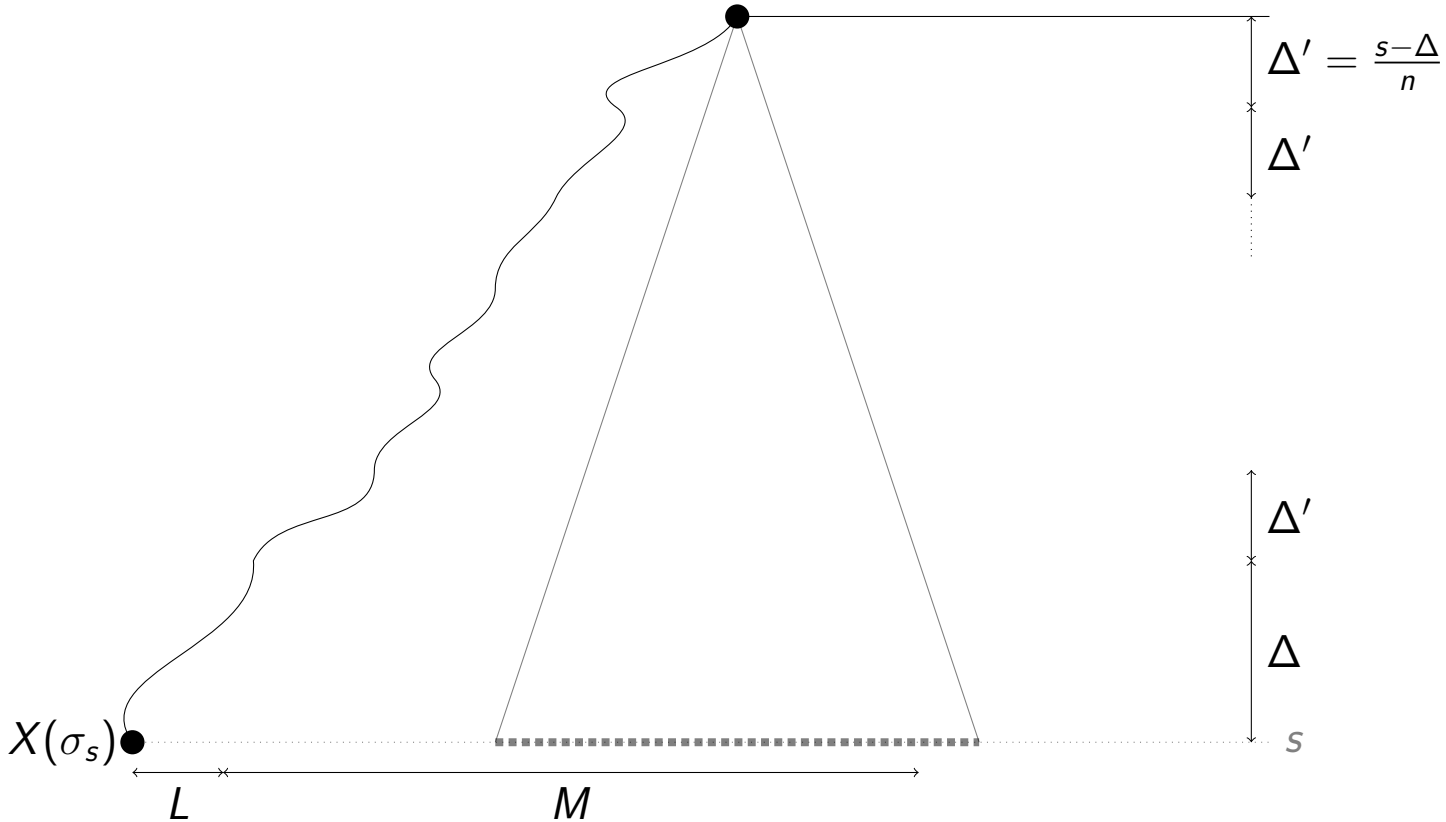
Présence de \bullet

Il existe $c > 0$ tels que pour tout $\sigma \in LO_0$, t grand et $\ell \gg \log t$

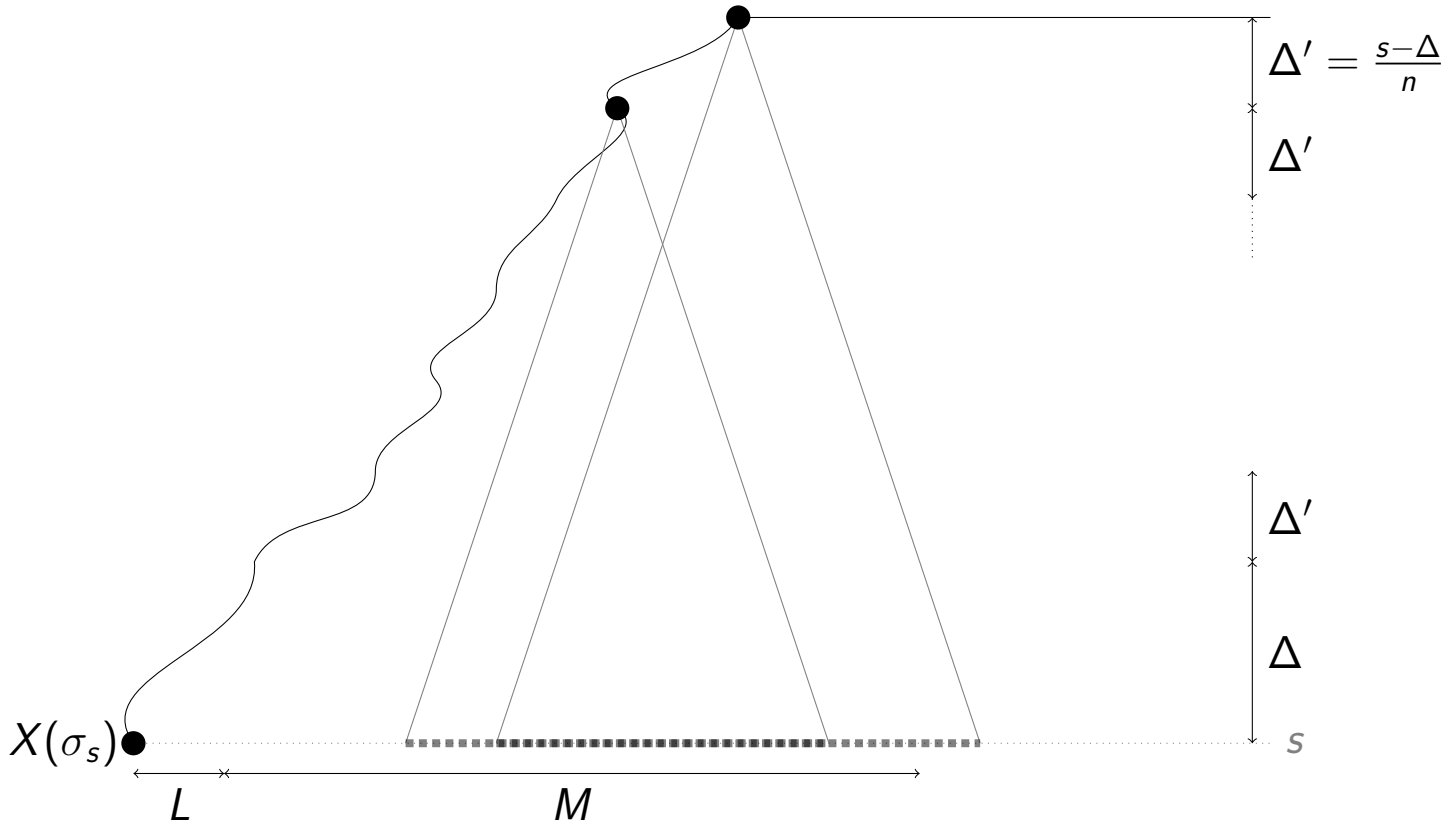
$$\mathbb{P}(\sigma_t \in \mathcal{H}(-\underline{v}t, 2\underline{v}t, \ell)) > 1 - e^{-c(t \wedge \ell)}.$$

Présence de ● devant le front

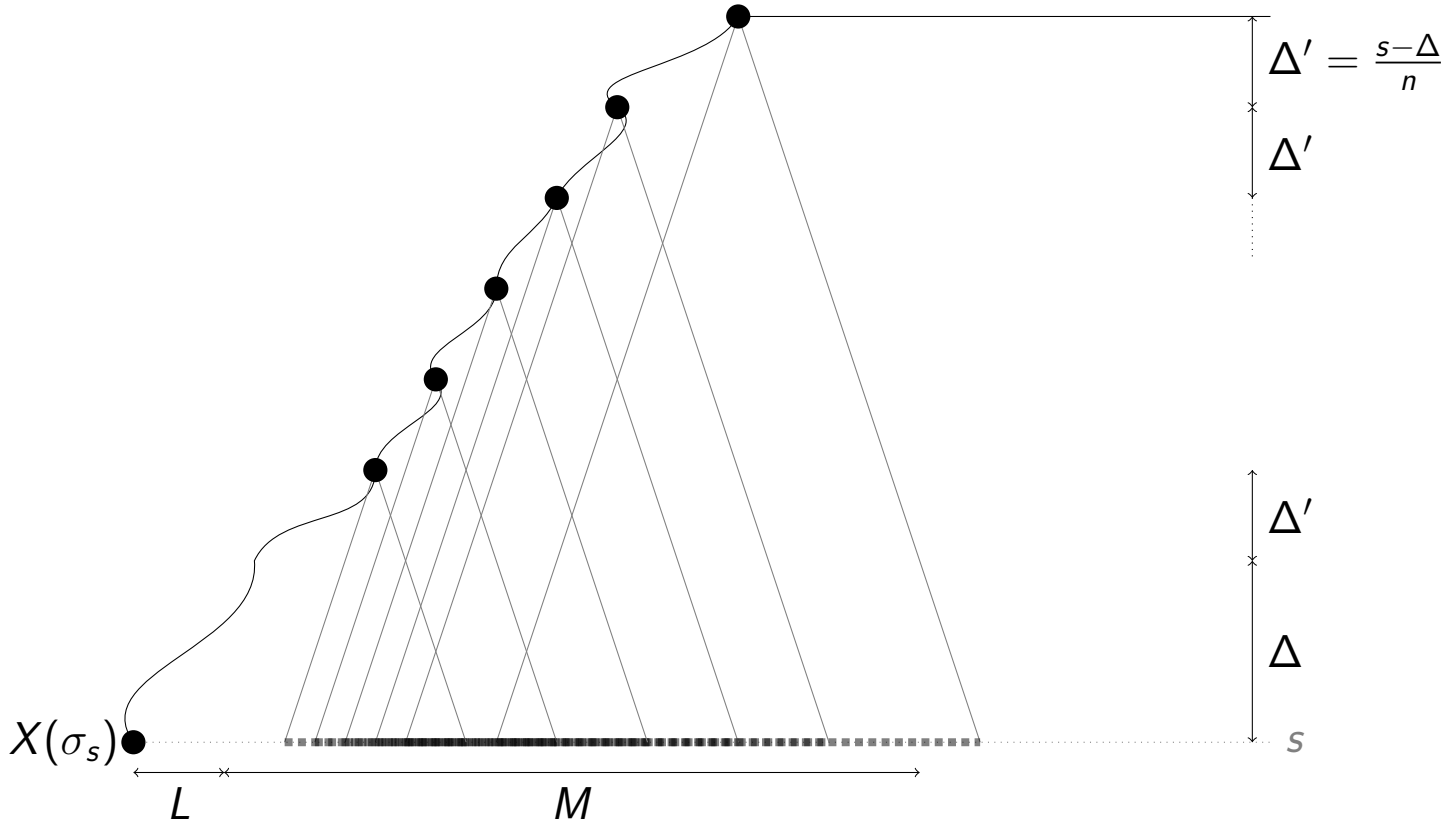
Présence de ● devant le front



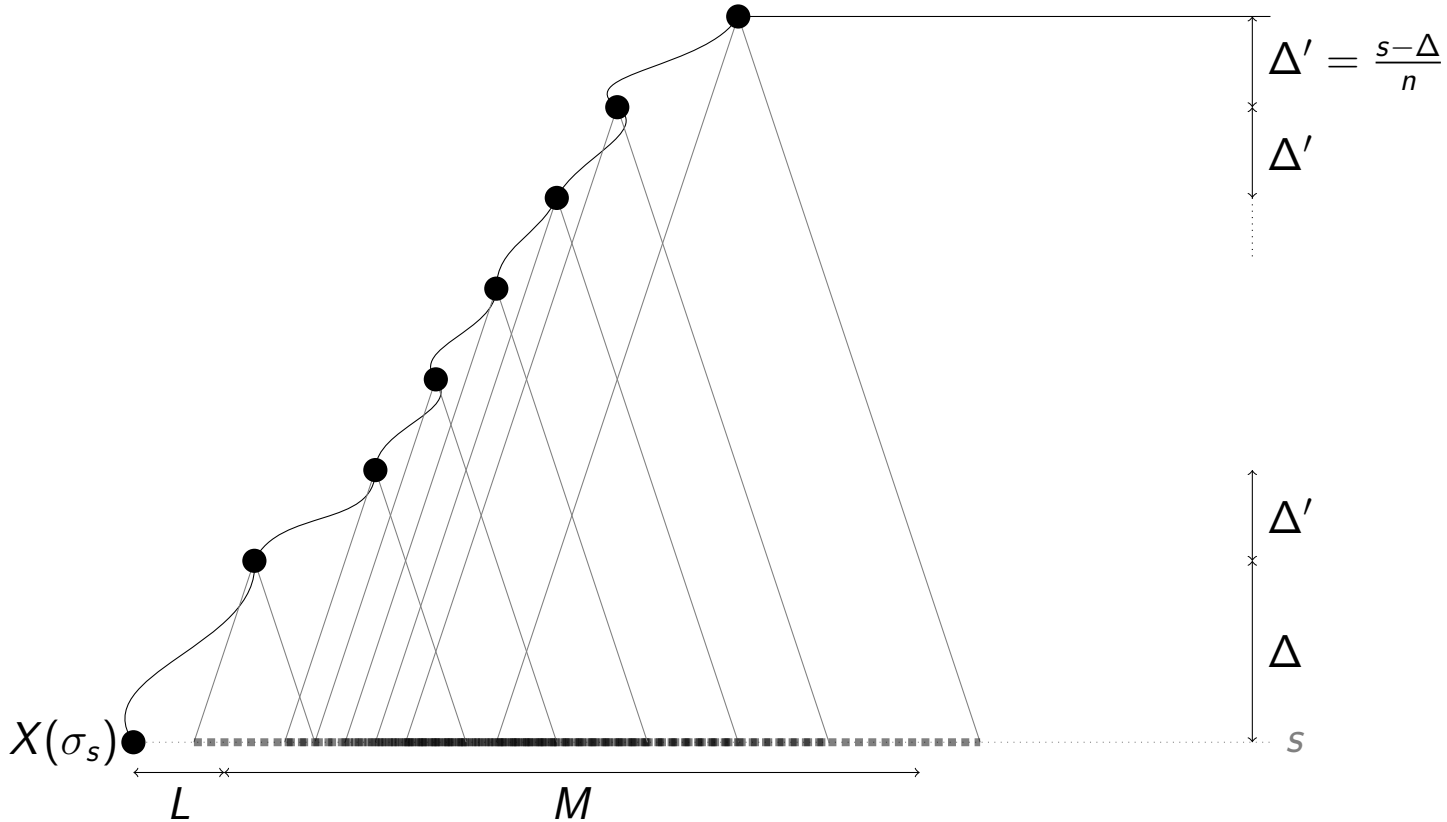
Présence de ● devant le front



Présence de ● devant le front



Présence de ● devant le front



Présence de ● devant le front

$\theta_{X(\sigma_s)}$ = translation spatiale du front

$\mathcal{H}(L, M, \ell) = \{\text{Il n'y a pas de trous sans } \bullet \text{ de taille } \ell \text{ dans } [L, L + M]\}$

Présence de ● devant le front

Soient $s, \ell, M, L > 0$ et $\sigma \in LO_0$.

1. Si $L + M \leq 2\underline{v}s$ il existe $c > 0$ tel que

$$\mathbb{P}_\sigma (\theta_{X(\sigma_s)}\sigma_s \in \mathcal{H}(L, M, \ell)^c) \leq (L + M) \exp(-c(L \wedge \ell)).$$

2. Si $L + M \geq 2\underline{v}s$ et $\sigma \in \mathcal{H}(0, L + M, 2\underline{v}s)$ alors il existe $c > 0$ tel que

$$\mathbb{P}_\sigma (\theta_{X(\sigma_s)}\sigma_s \in \mathcal{H}(L, M, \ell)^c) \leq \frac{s}{L} \exp(-c(L \wedge \ell)) + M \exp(-c(s \wedge \ell)).$$

Décorrélation

$\theta_{X(\sigma_t)}$ = translation spatiale du front

Décorrélation

$\theta_{X(\sigma_t)}$ = translation spatiale du front

Equilibre μ loin du front

- Distance devant le front $L \leq Ct$
- Support sur lequel on veut l'équilibre $K \leq e^{L^\alpha}$ avec $\alpha < 1/2$.

Alors il existe $\delta, c > 0$ tels que

"si les \bullet de σ sont éloignés de moins de δL sur $[0, M]$ "

alors pour toute f à support dans $[0, M]$, $\mu(f) = 0$ et $\|f\|_\infty \leq 1$,

$$\mathbb{E}_\sigma [f(\theta_{X(\sigma_t)+L\sigma_t})] \leq e^{-c\sqrt{L}}.$$

Décorrélation

$\theta_{X(\sigma_t)}$ = translation spatiale du front

Equilibre μ loin du front

- Distance devant le front $L \leq Ct$
- Support sur lequel on veut l'équilibre $K \leq e^{L^\alpha}$ avec $\alpha < 1/2$.

Alors il existe $\delta, c > 0$ tels que

"si les \bullet de σ sont éloignés de moins de δL sur $[0, M]$ "

alors pour toute f à support dans $[0, M]$, $\mu(f) = 0$ et $\|f\|_\infty \leq 1$,

$$\mathbb{E}_\sigma [f(\theta_{X(\sigma_t)+L}\sigma_t)] \leq e^{-c\sqrt{L}}.$$

→ sous hypothèse de présence de \bullet :

$$\| \text{loi vu du front} - \text{équilibre} \|_{[L, L+K]} \leq e^{-c\sqrt{L}}$$

Notion de Couplage

Soient ω et σ deux configurations initiales. On veut construire un couplage $(\omega^{[t]}, \sigma^{[t]})$ entre les configurations vues depuis le front tel que

$$\mathbb{P}(\omega^{[t]} \text{ et } \sigma^{[t]} \text{ coïncident sur } [0, ct]) \rightarrow 1.$$

Notion de Couplage

Soient ω et σ deux configurations initiales. On veut construire un couplage $(\omega^{[t]}, \sigma^{[t]})$ entre les configurations vues depuis le front tel que

$$\mathbb{P}(\omega^{[t]} \text{ et } \sigma^{[t]} \text{ coïncident sur } [0, ct]) \rightarrow 1.$$

[Ganguly, Lubetzky, Martinelli '15] \rightarrow EST

Notion de Couplage

Soient ω et σ deux configurations initiales. On veut construire un couplage $(\omega^{[t]}, \sigma^{[t]})$ entre les configurations vues depuis le front tel que

$$\mathbb{P}(\omega^{[t]} \text{ et } \sigma^{[t]} \text{ coïncident sur } [0, ct]) \rightarrow 1.$$

[Ganguly, Lubetzky, Martinelli '15] \rightarrow EST

- ▶ Couplage **basique**: les configurations évoluent selon la représentation graphique en utilisant les mêmes horloges de Poisson et Bernoulli

Notion de Couplage

Soient ω et σ deux configurations initiales. On veut construire un couplage $(\omega^{[t]}, \sigma^{[t]})$ entre les configurations vues depuis le front tel que

$$\mathbb{P}(\omega^{[t]} \text{ et } \sigma^{[t]} \text{ coïncident sur } [0, ct]) \rightarrow 1.$$

[Ganguly, Lubetzky, Martinelli '15] \rightarrow EST

- ▶ Couplage **basique**: les configurations évoluent selon la représentation graphique en utilisant les mêmes horloges de Poisson et Bernoulli
- ▶ Couplage **indépendant**: chacun est tirée selon sa loi respective et on considère la loi produit

Notion de Couplage

Soient ω et σ deux configurations initiales. On veut construire un couplage $(\omega^{[t]}, \sigma^{[t]})$ entre les configurations vues depuis le front tel que

$$\mathbb{P}(\omega^{[t]} \text{ et } \sigma^{[t]} \text{ coïncident sur } [0, ct]) \rightarrow 1.$$

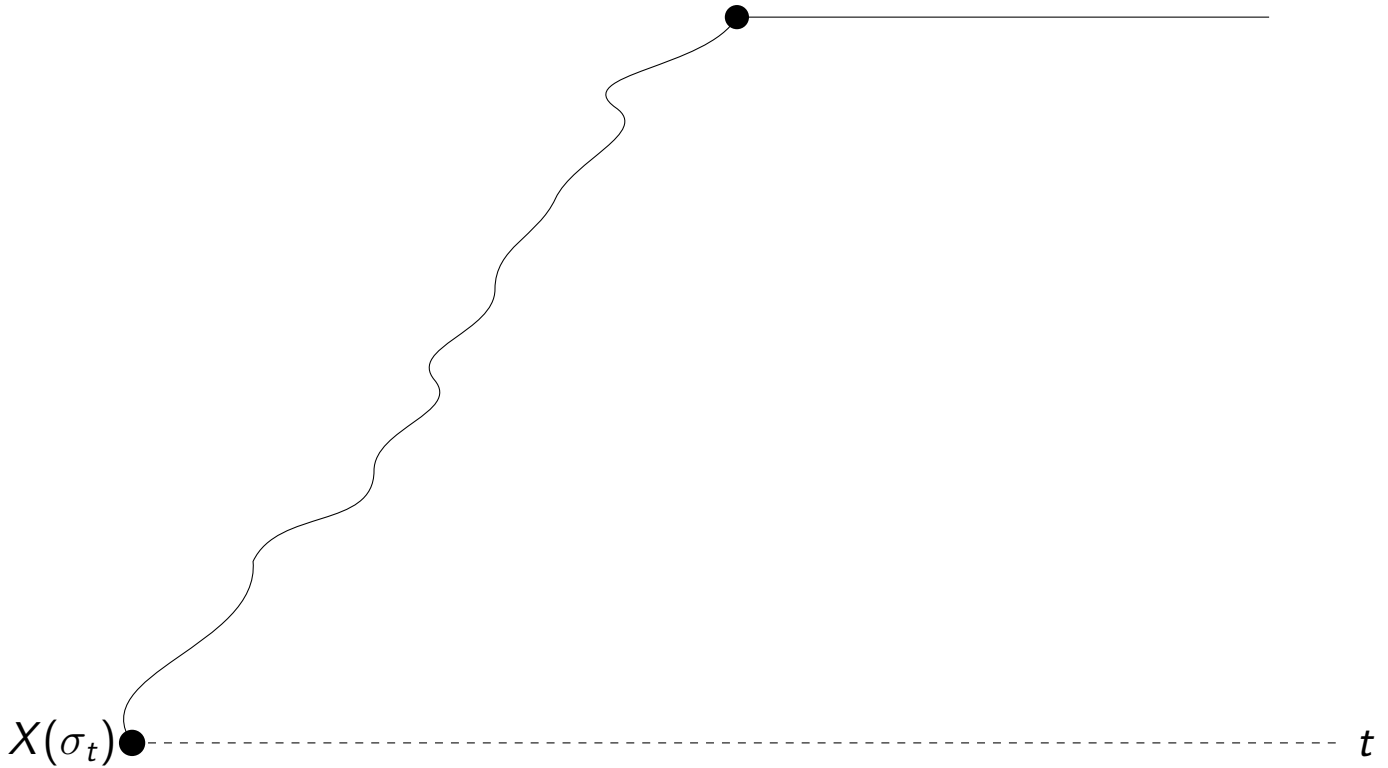
[Ganguly, Lubetzky, Martinelli '15] \rightarrow EST

- ▶ Couplage **basique**: les configurations évoluent selon la représentation graphique en utilisant les mêmes horloges de Poisson et Bernoulli
- ▶ Couplage **indépendant**: chacun est tirée selon sa loi respective et on considère la loi produit
- ▶ Couplage **maximal**: couplage (non explicite) qui réalise la distance en variation totale *i.e.*

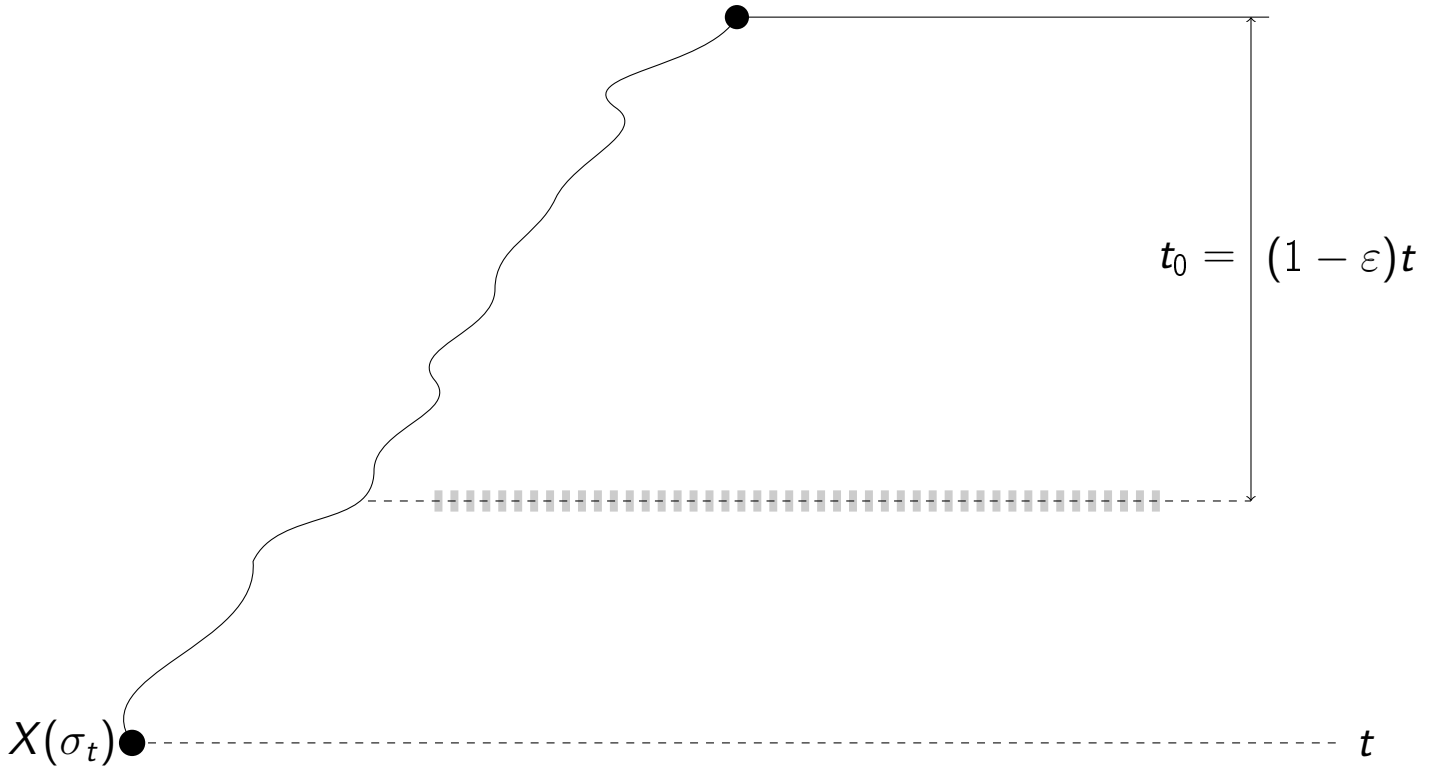
$$\|\mu - \mu'\| = \inf\{M(\omega \neq \omega') : M \text{ couplage de } \mu \text{ et } \mu'\}$$

Couplage

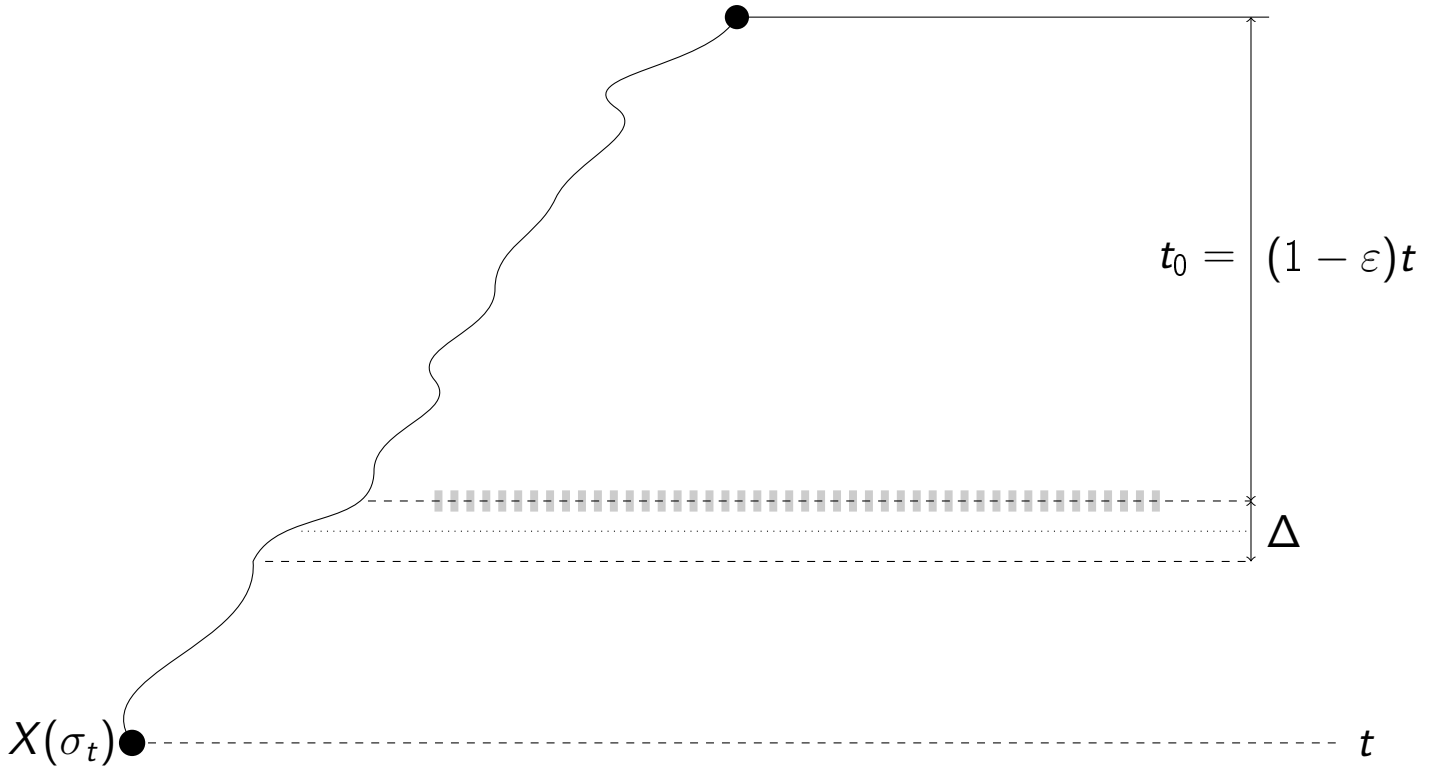
Couplage



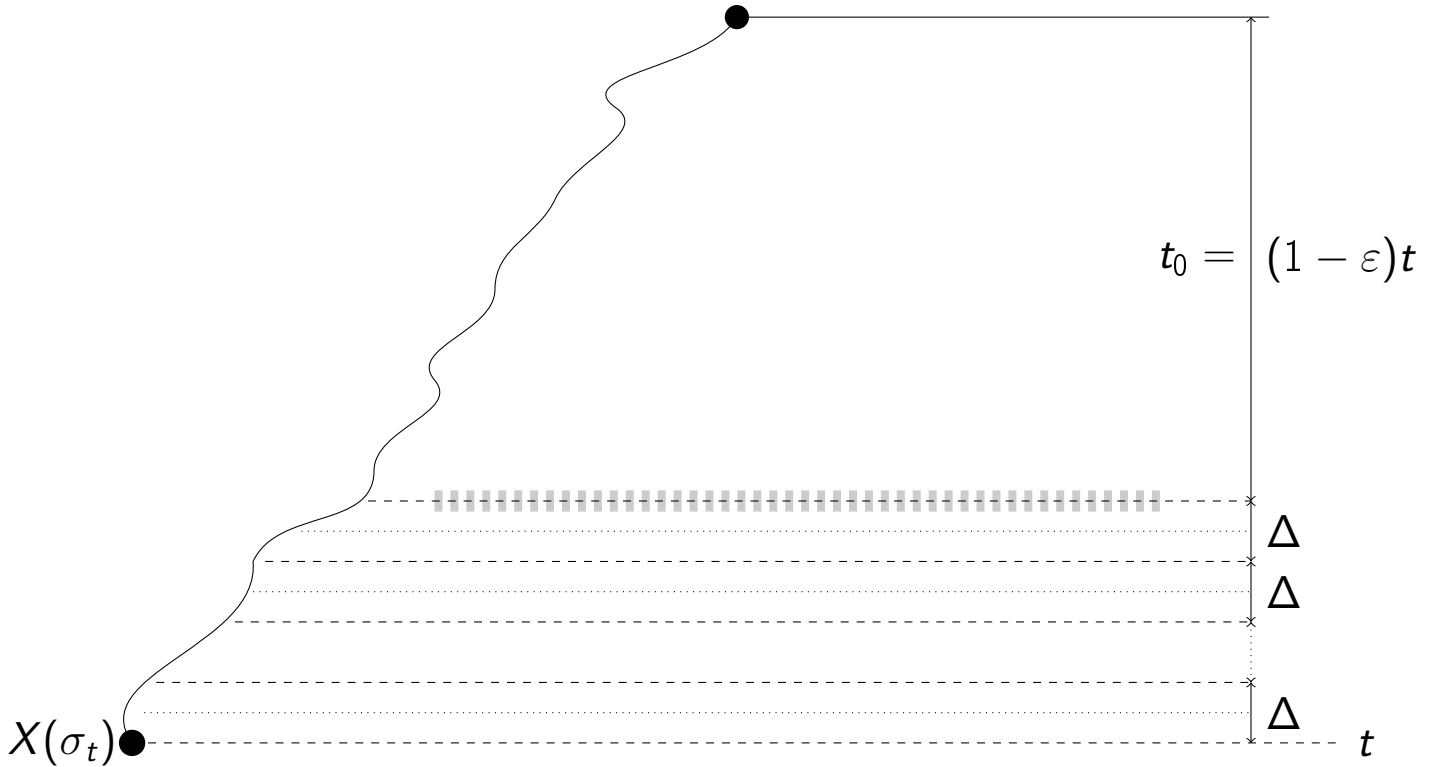
Couplage



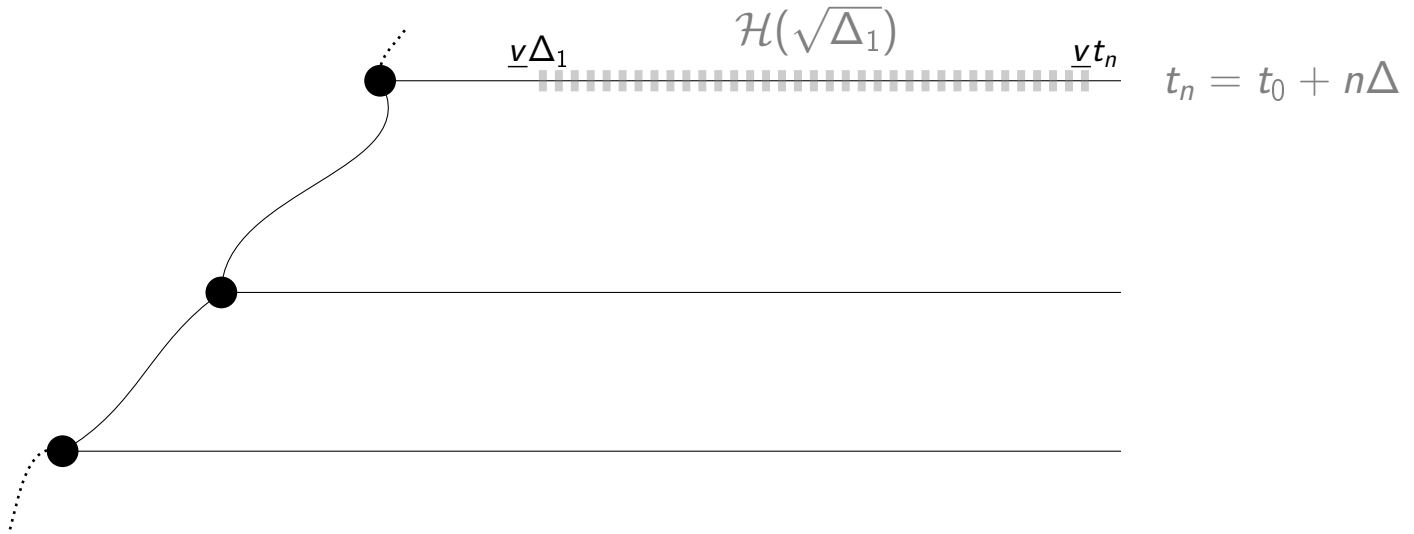
Couplage



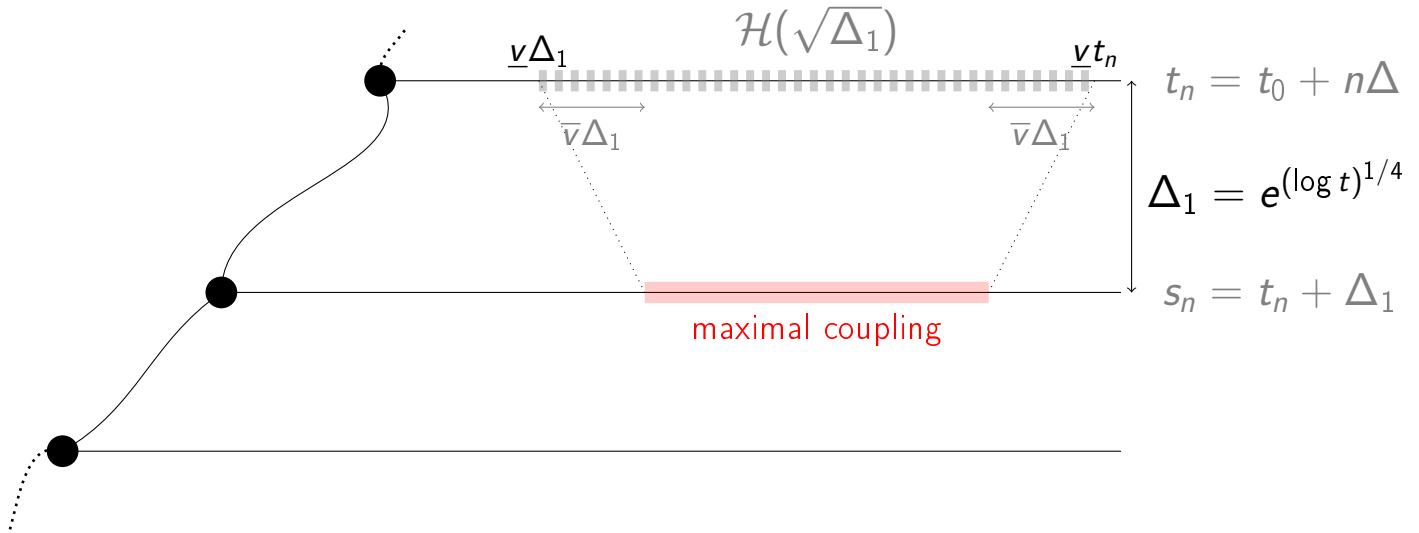
Couplage



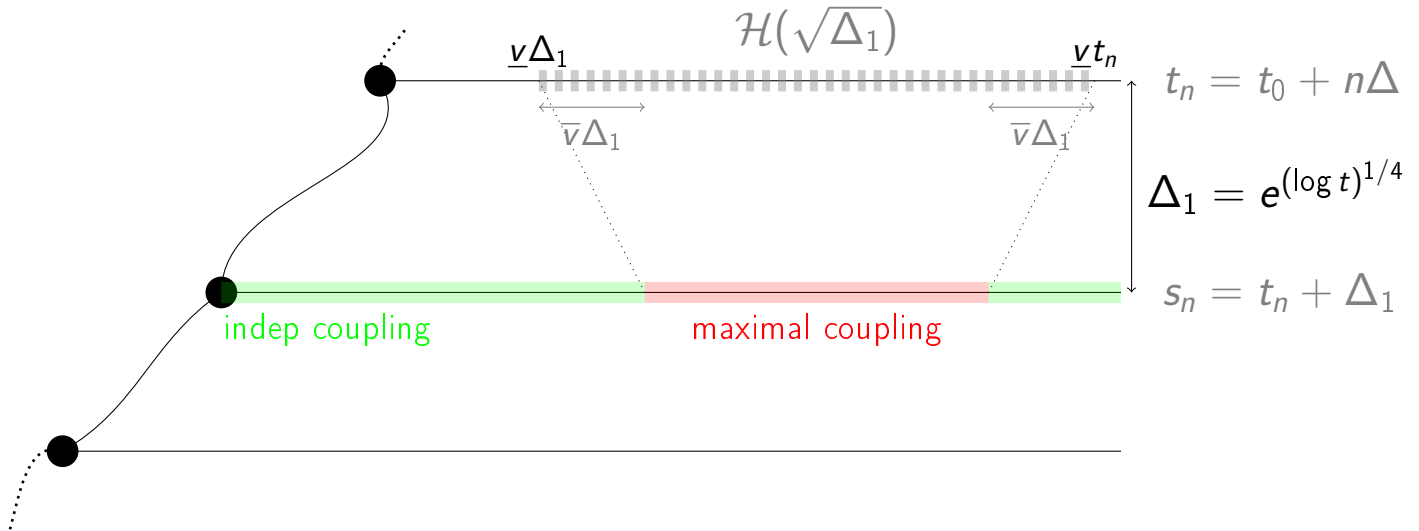
Construction d'un couplage



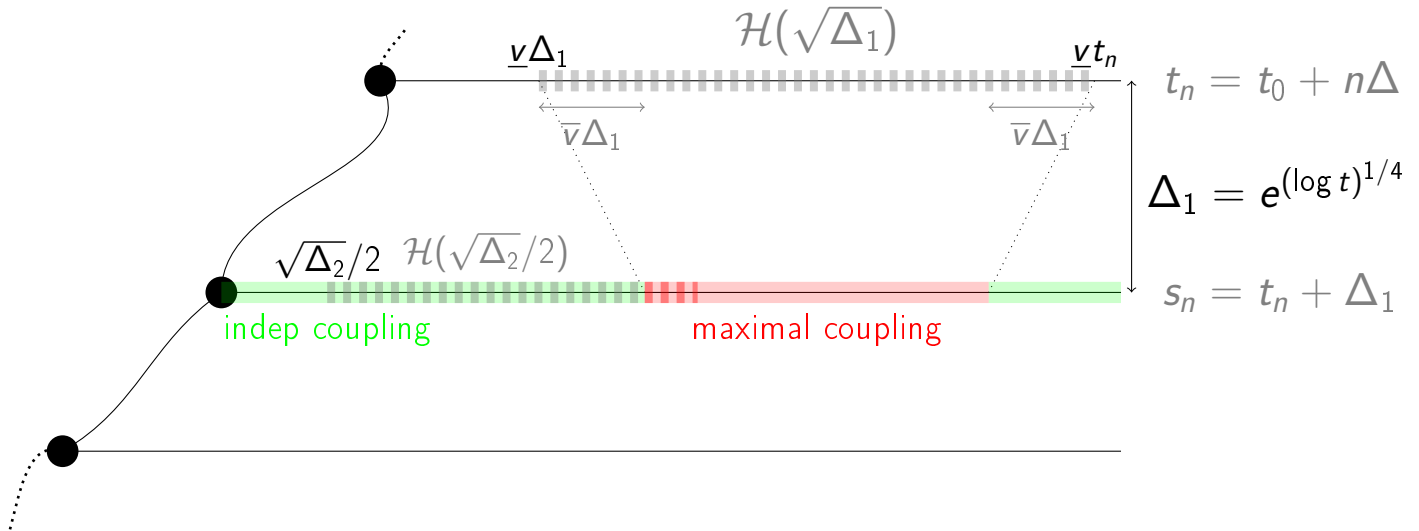
Construction d'un couplage



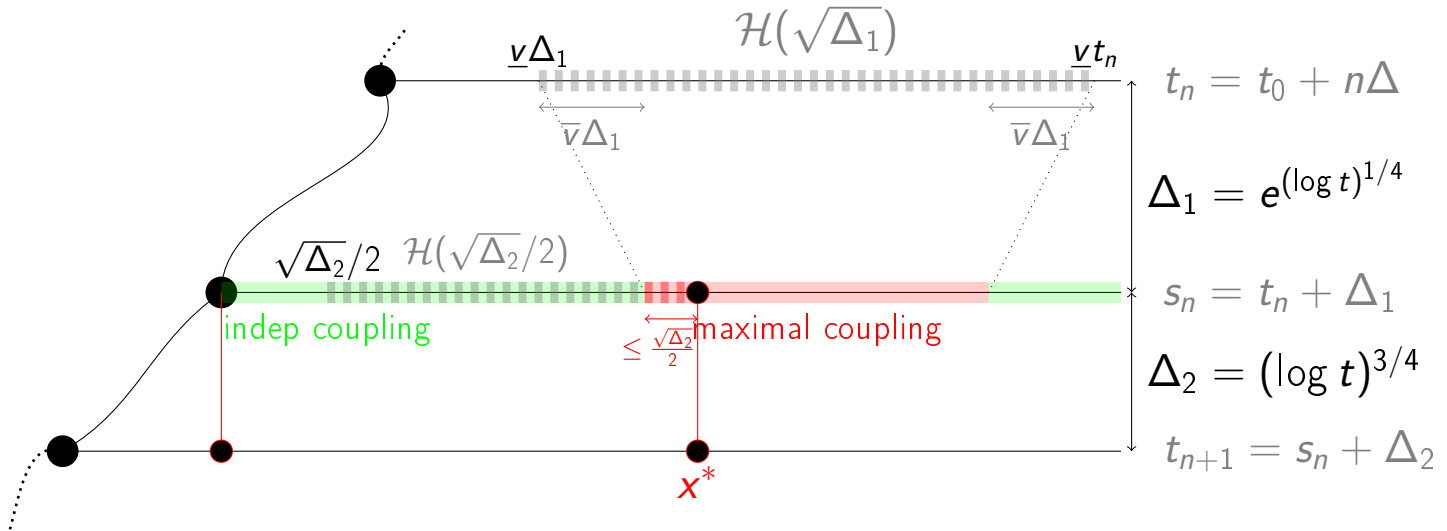
Construction d'un couplage



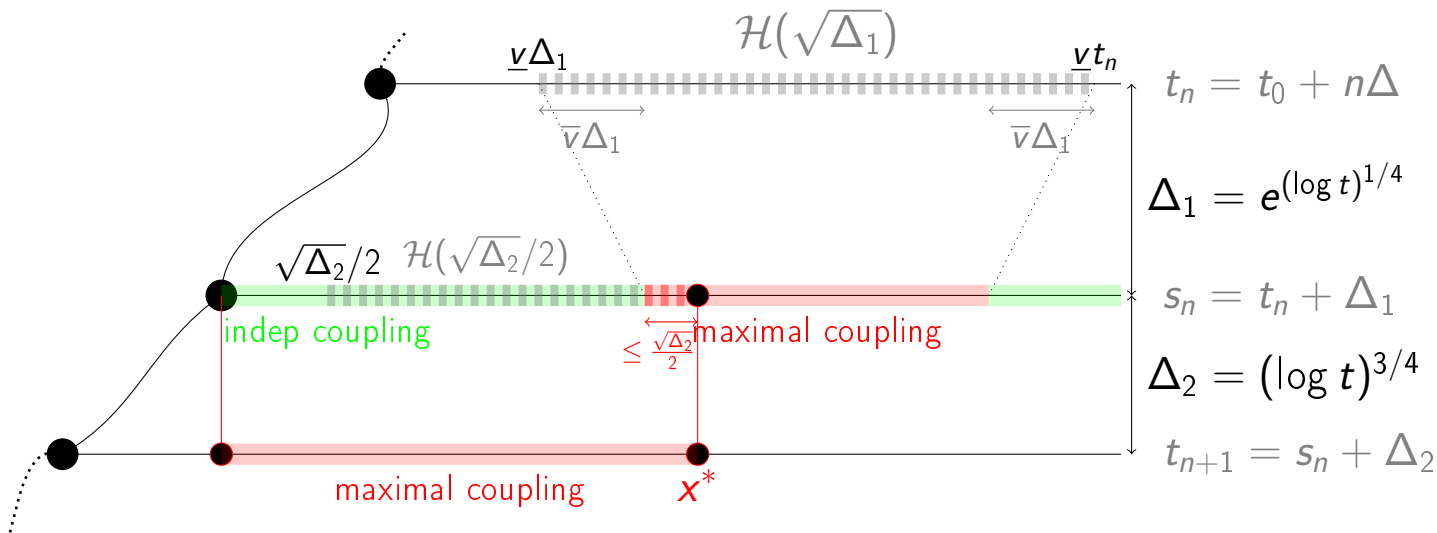
Construction d'un couplage



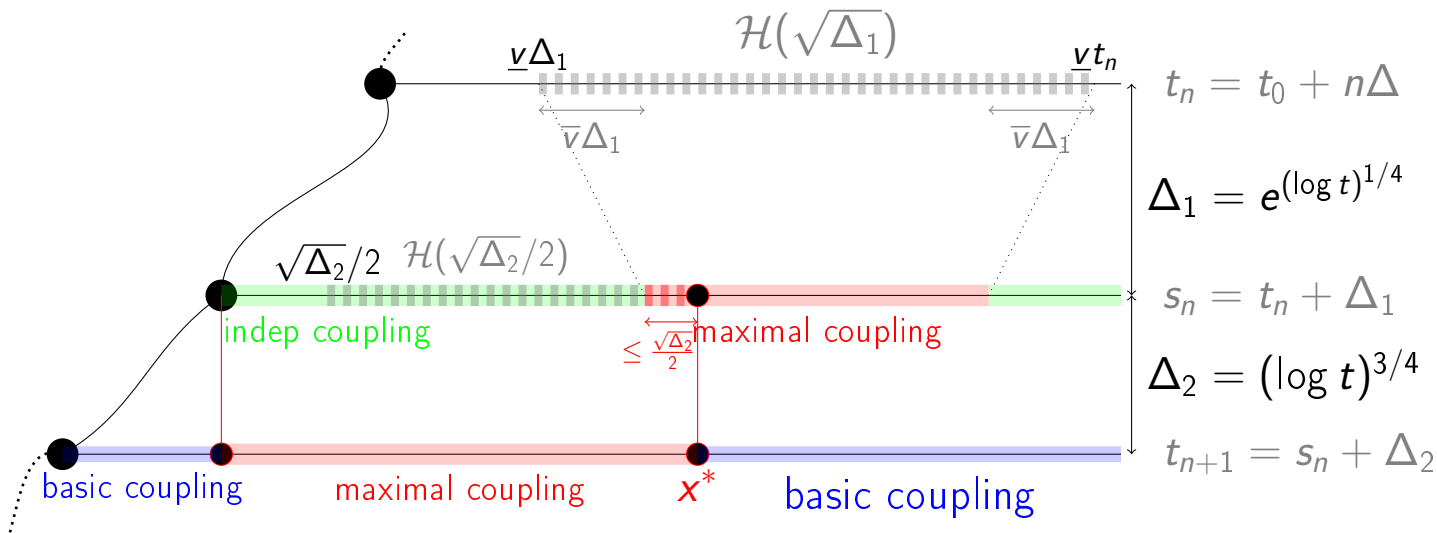
Construction d'un couplage



Construction d'un couplage



Construction d'un couplage



Construction d'un couplage

Argument de couplage

Soient ω et σ deux configurations initiales. Il existe un couplage $(\omega^{[t]}, \sigma^{[t]})$ entre les configurations vues du front tel que

$$\mathbb{P}(\omega^{[t]} \text{ et } \sigma^{[t]} \text{ coïncident sur } [0, ct]) \geq 1 - \exp(-\exp((\log t)^{1/4}))$$

avec $\forall \varepsilon, 1 - \exp(-(\log t)^{1/\varepsilon}) \leq 1 - \exp(-\exp((\log t)^{1/4})) \leq 1 - \exp(-t^\varepsilon)$.

Construction d'un couplage

Argument de couplage

Soient ω et σ deux configurations initiales. Il existe un couplage $(\omega^{[t]}, \sigma^{[t]})$ entre les configurations vues du front tel que

$$\mathbb{P}(\omega^{[t]} \text{ et } \sigma^{[t]} \text{ coïncident sur } [0, ct]) \geq 1 - \exp(-\exp((\log t)^{1/4}))$$

avec $\forall \varepsilon, 1 - \exp(-(\log t)^{1/\varepsilon}) \leq 1 - \exp(-\exp((\log t)^{1/4})) \leq 1 - \exp(-t^\varepsilon)$.

Théorème

Le processus vu depuis le front a une unique mesure invariante ν . Pour toute π mesure initiale sur LO_0 , la mesure vue du front au temps t converge vers ν .

Loi des grands nombres

$X(\sigma_t)$ front du FA de configuration initiale σ

Vitesse linéaire du front

Il existe v tel que pour tout $\sigma \in LO_0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(\sigma_t)}{t} = v \mathbb{P} - a.s.$$

Loi des grands nombres

$X(\sigma_t)$ front du FA de configuration initiale σ

Vitesse linéaire du front

Il existe v tel que pour tout $\sigma \in LO_0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X(\sigma_t)}{t} = v \mathbb{P} - a.s.$$

- ▶ On découpe $X(\sigma_t)$ en incréments successifs ξ_1, \dots, ξ_n et on regarde leurs corrélations
- ▶ Si j petit $Cov_\sigma(\xi_j, \xi_n) = O(\text{erreur couplage})$
- ▶ Si j grand $Cov_\sigma(\xi_j, \xi_n) = Cov_v(\xi_1, \xi_{n-j-1}) + O(\text{erreur couplage})$
- ▶ On adapte une preuve de LGN classique

Perspectives

Perspectives

- ▶ (en cours) Théorème Central Limite

Perspectives

- ▶ (en cours) Théorème Central Limite

- ▶ Pour de plus petites valeurs de q
 - Comparaison avec un autre modèle que le PC pour $q < q_c(PC)$
 - Convergence vers l'équilibre pour $q < 1/2$

Perspectives

- ▶ (en cours) Théorème Central Limite
- ▶ Pour de plus petites valeurs de q
 - Comparaison avec un autre modèle que le PC pour $q < q_c(PC)$
 - Convergence vers l'équilibre pour $q < 1/2$
- ▶ Dimension supérieure: théorème de forme

Merci de votre attention