Lemme de la couturière non linéaire

Antoine Brault
sous la direction de Laure Coutin et Antoine Lejay

Institut de Mathématiques de Toulouse

Journées de probabilités
20 juin 2017

Objet d'étude

V, W deux espaces de Banach.
Étude de l'équation différentielle :

$$\mathrm{d}Y_t = f(Y_t)\mathrm{d}X_t, \quad Y_s = a \in V, \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

où :

- $X : [0, T] \to V$ trajectoire « irrégulière » déterministe
- f un champ de vecteur régulier
- on cherche $Y : [0, T] \to W$

Exemple :

- X la trajectoire d'un processus stochastique (pas nécessairement une martingale)

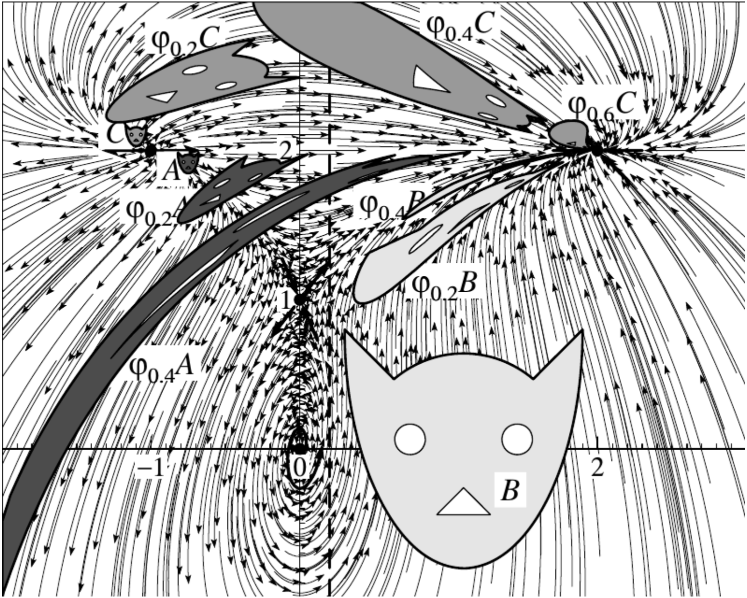
Questions sur cette équation différentielle ?

Étude de l'équation différentielle :

$$\mathrm{d}Y_t = f(Y_t)\mathrm{d}X_t, \quad Y_s = a \in V.$$

- définition d'une solution Y
- existence et unicité
- construire un flot $\psi : a \mapsto Y$ et connaître sa régularité
- construire numériquement ce flot

Un flot en image



Analyse du problème

Cas où s et t sont proches.

$$\begin{aligned} Y_t &= a + \int_s^t f\left(a + \int_s^u f(Y_v)\mathrm{d}X_v\right)\mathrm{d}X_u \\ &\approx a + f(a)X_{s,t} + f'(a)\int_s^t \int_s^u f(Y_v)\mathrm{d}X_u\mathrm{d}X_v + \dots \\ &\approx a + f(a)X_{s,t} + f'(a)f(a)\int_s^t \int_s^u \mathrm{d}X_u\mathrm{d}X_v + \dots \end{aligned}$$

En dimension 1, $X : [0,T] \to \mathbb{R}$:

$$Y_t \approx a + f(a)X_{s,t} + f'(a)f(a)\frac{X_{s,t}^2}{2} + \dots$$

Schéma d'Euler

On tronque le développement précédent :

$$\phi_{t,s}(a) := a + f(a)X_{s,t}.$$

Itération sur une subdivision π de $[0, T]$:

$$\phi^{\pi}_{t,s}(a) := \phi_{t,t_j} \circ \cdots \circ \phi_{t_i,s}(a),$$

où $[t_i, t_j] = \pi \bigcap [s, t]$.

- A-t-on convergence (quelle topologie ?) de ϕ^{π} lorsque $|\pi| \longrightarrow 0$?
- Sinon développement à un ordre supérieur ? Mais $\int_s^t \int_s^u \mathrm{d}X_v \mathrm{d}X_u = ?$ en dimension > 1 ?
- Autres types d'approximations ϕ ?

Cas d'une EDO

Dans le cas où l'on résout :

$$\mathrm{d}Y_t = f(Y_t)\mathrm{d}t, \quad Y_s = a,$$

avec $f \in C_b^1$ il y converge du schéma d'Euler

$$\phi_{t,s}(a) := a + f(a)(t-s).$$

Alors $\phi^\pi \to \psi$ uniformément en temps et en espace :

- propriété de flot : $\psi_{t,s} \circ \psi_{s,r}(a) = \psi_{t,r}(a)$
- ψ est lipschitzienne en espace :

$$\|\psi_{t,s}(b) - \psi_{t,s}(a)\| \leq C\,\|b-a\|$$

- on a

$$\|\psi_{t,s} - \phi_{t,s}\|_{\mathrm{Lip}} \leq C|t-s|^\theta,$$

avec $\theta > 1$.

Formule de Trotter

On cherche à résoudre :

$$Y_t' = AY_t + BY_t, \quad Y_s = a,$$

où A, B sont des opérateurs linéaires bornés. Alors d'après la formule de Trotter :

$$Y_t = \lim_{n \to +\infty} \phi_{t,s}^{\pi}(a),$$

où l'on peut choisir

- $\phi_{t,s}(a) := \exp\left((t-s)A\right) \exp\left((t-s)B\right) a$
- $\phi_{t,s}(a) := (I + (t-s)A)(I + (t-s)B)a.$

☛ Extension possible au cas non borné.

Définition du cadre

On dit qu'une famille de fonctions continues $\phi_{t,s} \in C(W)$ est un *presque flot* si pour $a, b \in W$, $0 \leq r \leq s \leq t \leq T$:

$$\phi_{t,t}(a) = a,$$

$$\|\phi_{t,s}(a) - a\| \leq N(a)\delta_T,$$

$$\|\phi_{t,s}(a) - \phi_{t,s}(b)\| \leq (1 + \delta_T)\|b - a\|,$$

$$\|\phi_{t,s} \circ \phi_{s,r}(a) - \phi_{t,r}(a)\| \leq N(a)|t - s|^\theta,$$

où

- $\delta_T \to 0$ quand $T \to 0$
- $N : W \to \mathbb{R}_+$ lipschitzienne
- $\theta > 1$.

Exemples

On suppose $X \in C^\alpha(V)$, $\alpha \in (0,1)$: $\|X\|_\alpha := \sup_{s,t\in[0,T]} \frac{\|X_{s,t}\|}{|t-s|^\alpha} < +\infty$.

Cas $\alpha \in (1/2, 1)$:

- $\phi_{t,s}(a) = a + f(a)X_{s,t}$, avec $f \in C_b^1$
- $N(a) = C(\|f'\|_\infty, \|X\|_\alpha)\,\|f(a)\|$
- $\delta_T = C(\|f'\|_\infty, \|X\|_\alpha)T^\alpha$
- $\theta = 2\alpha$.

Exemples

Cas $\alpha \in (1/3, 1/2]$

- $\phi_{t,s}(a) = a + f(a)X_{s,t} + f'(a)f(a)\mathbb{X}_{s,t}$, avec $f \in C_b^2$
- $\mathbb{X}_{s,t} = \int_s^t \int_s^u \mathrm{d}X_v \mathrm{d}X_u$
  - ☛ $\mathbb{X}_{r,t} = \mathbb{X}_{r,s} + \mathbb{X}_{s,t} + X_{r,s}X_{s,t}$ (propriété algébrique)
  - ☛ $\|\mathbb{X}\|_{2\alpha} < +\infty$ (propriété analytique)
- $N(a) = C(\|f''\|_\infty, \|f'\|_\infty, \|X\|_\alpha, \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}) \|f(a)\|$
- $\delta_T = C(\|f''\|_\infty, \|f'\|_\infty, \|X\|_\alpha, \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}) T^\alpha$
- $\theta = 3\alpha$.

Un calcul type...

En effet, pour le deuxième cas :

$$\begin{aligned}\phi_{t,s} \circ \phi_{s,r}(a) - \phi_{t,r}(a) &= \left[f \circ \phi_{s,r}(a) - f(a) - (f'f)(a) X_{r,s}\right] X_{s,t} \\ &+ \left[(f'f) \circ \phi_{s,r}(a) - (f'f)(a)\right] \mathbb{X}_{s,t} \\ &= \left[f \circ \phi_{s,r}(a) - f(a) - f'(a)(\phi_{s,r}(a) - a)\right] X_{s,t} \\ &+ f'(a) f(a) \mathbb{X}_{r,s} X_{s,t} \\ &+ \left[(f'f) \circ \phi_{s,r}(a) - (f'f)(a)\right] \mathbb{X}_{s,t},\end{aligned}$$

donc

$$\|\phi_{t,s} \circ \phi_{s,r}(a) - \phi_{t,r}(a)\| \leq C\left(\|f\|_{C_b^2}, \|X\|_\alpha, \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}\right) |t-s|^{3\alpha},$$

lorsque $\alpha \in (1/3, 1/2]$, l'exposant $3\alpha > 1$.

Premier lemme de la couturière

Lemma

Pour ϕ un presque flot et un temps $T > 0$ assez petit, il existe une constante $M \geq 0$ telle que

$$\left\|\phi^{\pi}_{t,s}(a) - \phi_{t,s}(a)\right\| \leq MN(a)|t-s|^{\theta},$$

$$N(\phi^{\pi}_{t,s}(a)) \leq K_T N(a),$$

où $K_T \to 1$ quand $T \to 0$.

Plan de la preuve

On pose $U_{r,t} = \left\|\phi^{\pi}_{t,r}(a) - \phi_{t,r}(a)\right\|$.

Démonstration.

- récurrence sur le nombre de points de π
- on décompose :

$$\begin{aligned}\phi^{\pi}_{t,r} - \phi_{t,r} &= \phi^{\pi}_{t,s} \circ \phi^{\pi}_{s,r} - \phi_{t,s} \circ \phi^{\pi}_{s,r} \\ &\quad + \phi_{t,s} \circ \phi^{\pi}_{s,r} - \phi_{t,s} \circ \phi_{s,r} \\ &\quad + \phi_{t,s} \circ \phi_{s,r} - \phi_{t,r}\end{aligned}$$

- $U_{r,t} \leq U_{s,t} + (1+\delta_T)U_{r,s} + B|t-r|^{\theta}$
- On choisit r, s, s', t tels que : $|t-s'|, |s-r| \leq |t-r|/2$, et alors pour T assez petit :

$$M := \frac{C'}{1-(1+\delta_T)2^{1-\theta}}.$$

Convergence vers un flot ?

On a obtenu un contrôle uniforme en π :

$$\left\|\phi^{\pi}_{t,s}(a) - \phi_{t,s}(a)\right\| \leq MN(a)|t-s|^{\theta}.$$

Est-ce qu'il y a converge vers un flot Lipschitz ?

☛ On a besoin de plus de régularité spatiale sur ϕ.

On souhaite obtenir une majoration uniforme en π sur :

$$\left\|\phi^{\pi}_{t,s} - \phi_{t,s}\right\|_{\mathrm{Lip}}.$$

Galaxie

Definition

On définit la relation d'équivalence $\sim$ sur l'espace des familles $(\phi_{t,s})_{(s,t)\in[0,T]}$ de fonctions continues tel que $\phi^1 \sim \phi^2$ si

$$\left\|\phi^1_{t,s}(a) - \phi^2_{t,s}(a)\right\| \leq CN(a)|t-s|^\theta,$$

où $\theta > 1$.

Chaque classe de quotient est appelé galaxie.

Proposition

Si la galaxie contient un flot Lipschitz alors c'est le seul.

Contrôle à 4 points compatible

Definition

Un presque flot ϕ vérifie un contrôle à 4 points si

$$\|\Phi_{t,s}(a,b,c,d)\| \leq C|t-s|^{\alpha}(|a-b| \vee |c-d|)^{\gamma-1}(|a-c| \vee |b-d|) \\ + (1+\delta_T)|a-b-c+d|,$$

où $\Phi := \phi_{t,s}(a) - \phi_{t,s}(b) - \phi_{t,s}(c) - \phi_{t,s}(d)$. On dit que ce contrôle est compatible si $\gamma > 1/\alpha$.

Exemple : pour $\alpha \in (1/2, 1)$ si $f \in C_b^{\gamma}$ avec $\gamma > 1/\alpha$ alors $\phi_{t,s}(a) := a + f(a)X_{s,t}$ vérifie le contrôle à 4 points.

Deuxième lemme de la couturière

Lemma

Si ϕ est un presque flot qui vérifie un contrôle à 4 points compatible alors

$$\left\|\phi^{\pi}_{t,s} - \phi_{t,s}\right\|_{\mathrm{Lip}} \leq M|t-s|^{\theta}.$$

Démonstration.

La preuve est semblable à celle du premier lemme mais en travaillant cette fois avec la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$. ∎

Convergence de ϕ^π

Proposition

Si ϕ est un presque flot tel que :

$$\left\|\phi^\pi_{t,s}\right\|_{\mathrm{Lip}} \leq L,$$

on dit que ϕ est uniformément lipschitz, alors il existe un unique flot ψ Lipschitz tel que :

$$\|\psi_{t,s} - \phi_{t,s}\|_{\mathrm{Lip}} \leq C|t-s|^\theta,$$

avec $\theta > 1$.

Lien avec les autres approches des rough paths

Approche de Davie : dans le cas $\alpha \in (1/2, 1)$ on choisit

$$\phi_{t,s}(a) = a + f(a)X_{s,t}.$$

Approche de Friz-Victoir :
On approxime X sur $[s, t]$ par une trajectoire $x^{s,t}$ régulière et on résout l'EDO :

$$y_{t,s} = a + \int_s^t f(y_{u,s}) \mathrm{d}x_u^{s,t}.$$

On choisit $\mu_{t,s} : a \mapsto y_{t,s}$ comme presque flot.
Approche Bailleul : dans le cas $\alpha \in (1/2, 1)$ on résout

$$y_{t,s} = a + \int_s^t f(y_{u,s}) X_{s,t} \mathrm{d}u.$$

On choisit $\mu_{t,s} : a \mapsto y_{t,s}$ comme presque flot.

Bibliographie

- A. M. Davie, Differential equations driven by rough paths : an approach via discrete approximation, *Appl. Math. Res. Express. AMRX*, 2007.
- Denis Feyel, Arnaud De La Pradelle, Gabriel Mokobodzki, A non commutative sewing lemma, *Electron. Commun. Probab.*, 2008.
- Peter Friz, Nicolas Victoir, Multidimensional stochastic processes as rough paths : theory and applications, *Cambridge University Press*, 2010.
- Laure Coutin, Antoine Lejay, Perturbed linear rough differential equations, *Ann. Math. Blaise Pascal*, 2014.
- Ismael Bailleul, Flows driven by rough paths, *Rev. Mat. Iberoam.*, 2015.

Fin de la présentation

Merci de votre attention